



مجموعه گام به گام پایه دهم

دیجی کنکور، رسانه دانش آموزان موفق

ورود به بخش گام به گام ها

برای ورود به بخش گام به گام کلیک کنید

نیاز به برنامه ریزی داری؟

آیا می دونستی؟

دیجی کنکور ناشر محبوب ترین و دقیق ترین برنامه ریزی تحصیلی
ویژه پایه دهم است

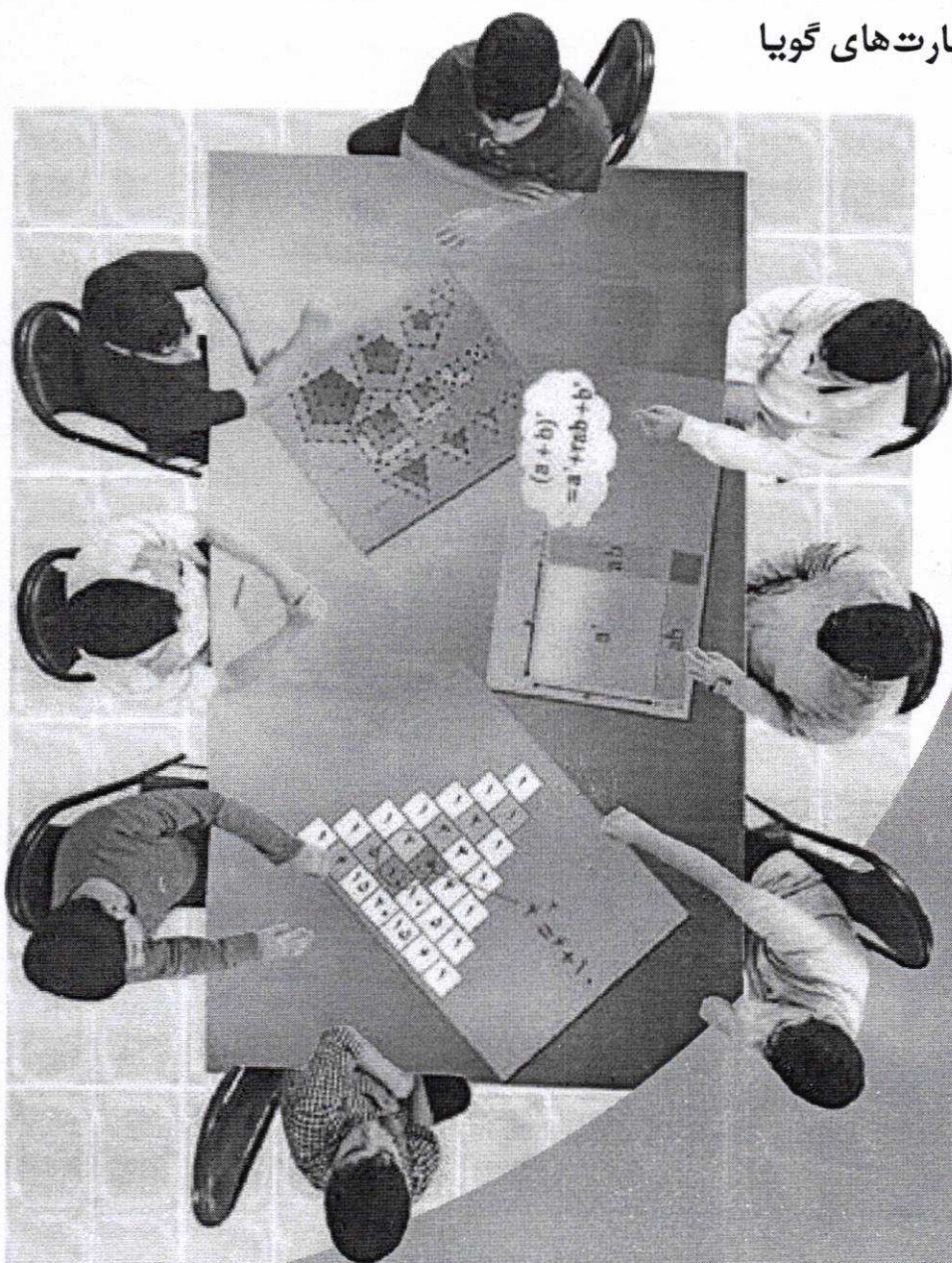
۰۲۱-۲۸۴۲۲۴۱۰

فصل اول

عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

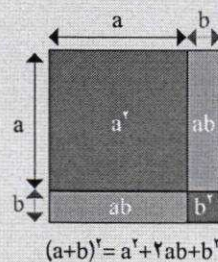
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

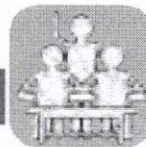
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(a+2)^2 = a^2 + 4a + 4$

ب) $(3a-1)^2 = 9a^2 - 6a + 1$

پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + 2b + \frac{1}{2}b^2$

ت) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$

ث) $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$

ج) $(3x+2)(3x-5) = 9x^2 - 9x - 10$

ج) $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

کار در کلاس



با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه

کنید.

الف) $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$

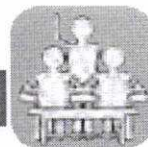


مثلث خیام^۱

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت بپردازیم. می‌دانیم که صورت بسط یافته دوجمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتن-پاسکال نامیده می‌شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند: «آیا ممکن است این روش بسط دوجمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیله دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی‌ها به حضور ابن‌سبط در کتاب مفتاح الحساب غیاث‌الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیرالدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب جوامع الحساب طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌ها نیز ردپای این بسط را به کتاب جبر و مقابله خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدود شش قرن قبل از نیوتن، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.

۱. حکیم، عمر خیام - علی اکبر ولایتی انتشارات آفتاب، تهران، ۱۳۸۹.



کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^2 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$

$$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

برای ساده کردن $(a+b)^2$ ، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از ۲ نیز

طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست

آورد؟

$$(a+b)^4 = (a+b)^2 (a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) = \dots$$

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.
 می‌توان برای توان‌های بیشتر چنین عمل کرد ولی مراحل طولانی خواهد شد.



فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	$(a+b)^0 = 1$
۱ ۱	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
.	.
.	.
.	.

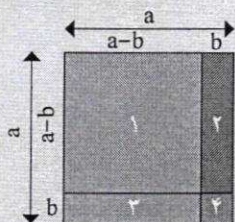
۱. در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی

بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

هر عدد سطر سوم از جمع دو عدد بالای آن در سطر دوم بدست می‌آید.
هر عدد سطر چهارم از جمع دو عدد بالای آن در سطر سوم بدست می‌آید.
هر عدد سطر پنجم از جمع دو عدد بالای آن در سطر چهارم بدست می‌آید.



آفرینش، دفترش تا باز شد
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد
دست حق تا نقش عالم می نگاشت
در سیرشت «دایره»، «بی» می گذاشت
شکل های هندسی و «منتظم»
اونهاد در نهاد هر قلم
با «مثلث»، «دایره»، یا «مستطیل»
می شود اندام این عالم شکیل!
آسمان، از اختران پر کرده است
روز و شب را در «تناظر» کرده است
این همه مجموعه های بی نظیر
که کشتان های «شمارش نابذیر»!
نظم این اعداد، در اوج کمال
در تناسب گشته عالم، بی مثال
زلف عالم تا پریشان می شود
این ریاضی، شانه های آن می شود!
با به استقراء و یا «برهان خلف»
می شود شانه، پریشانی زلف!
باز، بین جغرافیای بی حدود
کوه ها بر دشت ها گشته «عمود»!
از حیات و از جماد و از نبات
پُر نمود این «دستگاه مختصات»



مساحت مربع:

$$s_1 = (a-b)^2 \quad (1)$$

$$s_1 = s - s_2 - s_3 - s_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \quad (2)$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{ب) } x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{پ) } 4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2(2x)(1) + (1)^2 = (2x - 1)^2$$

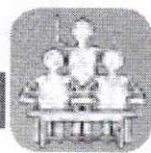
$$\text{ت) } y^2 + 3y - 10 = y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-2)(y+5)$$

$$\text{ث) } 9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8$$

$$= (3x)^2 + (2 \times 3 \times 2) + (2)^2$$

$$= (3x+2)^2$$

کار در کلاس



عبارت های جبری زیر را به صورت ساده ترین حالت، تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 12x^2(x^2+6)^2 - 8x^5(x^2+6)^2$$

$$= 4x^5(x^2+6)^2(3x^2-2(x^2+6))$$

$$= 4x^5(x^2+6)^2(x^2-12)$$

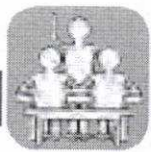
$$= 4x^5(x^2+6)^2(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{12})$$

$$\text{ب) } x^4 - 64x^2 = x^2(x^2 - 64)$$

$$= x^2(x^2 - 8^2) = x^2(x-8)(x+8)$$

$$= x^2(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(\sqrt{2}+1)$$

کار در کلاس



بعضی از محاسبات عددی را می توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\text{الف) } (999)^2 = (1000-1)^2 = \dots = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

$$\text{ب) } 96 \times 104 = (100-4)(100+4) = 100^2 - 4^2 = 10000 - 16 = 9984$$

$$\text{پ) } 101^2 = (100+1)^2 = \dots = 100^2 + 200 + 1 = 10201$$

ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته اید.

ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می رسد؟ لطفاً توضیح دهید.

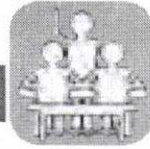
$$\text{ت) } 507 \times 493 = (500+7)(500-7) = 500^2 - 7^2 = 250000 - 49 = 249951$$

ث) در حساب کردن مساحت مربع

مربع نقطه چین باید اضافه شود
کلاس جمع و

$$* 2^{10} = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024$$

کار در کلاس



در تساوی های زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار دهید:

$$1 = 2^0$$

$$1 + 1 = 2^1$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2 \rightarrow 2$$

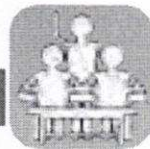
$$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \rightarrow 3$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \rightarrow 4$$

- چه ارتباطی بین توان های عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟ **توان عدد ۲، یکی کمتر از شماره سطر است.**
- آیا می توانید الگویی برای توان های عدد ۲، بر حسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟ **اگر n شماره سطر باشد ۲ⁿ⁻¹**
- براساس این الگو مقدار ۲^{۱۰} را به دست آورید. *

- آیا می توانید مانند الگوی بالا، الگوهای دیگری از مثلث خیام حدس بزنید؟ **توان n ام عدد ۲ برابر است با جمع اعداد سطر (n+1) ام مثلث خیام**

کار در کلاس



توان های مختلف ۱۱ را، به دست آورید.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = (1+10)^2 = 1 + 2 \times 10 + 10^2 = 1 + 20 + 100 = 121$$

$$11^3 = (1+10)^3 = \dots + \dots + \dots = 1 + 30 + \dots + 1000 = 1331$$

$$11^4 = (1+10)^4 = 1 + 4 \times 10 + \dots + \dots + 10^4 = 14641$$

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۲ و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟ **توان ۲ عدد ۱۱ از چهارم قرار گرفتن اعداد سطر سوم مثلث خیام درست می آید.**
- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۳ و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟ **توان ۳ عدد ۱۱ از پنجم قرار گرفتن اعداد سطر چهارم مثلث خیام درست می آید.**
- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در ۱۱^۴ و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟ **توان ۴ عدد ۱۱ از ششم قرار گرفتن اعداد سطر پنجم مثلث خیام درست می آید.**
- آیا می توانید بدون هیچ گونه محاسبه ای ۱۱^۵ را بر حسب اعداد واقع در سطر ششم مثلث خیام به دست آورید؟

- چه نتیجه ای می توانید برای توان های مختلف ۱۱، بگیرید؟ *

$$11^5 = 161051$$

* توان n ام عدد ۱۱ برابر است با

عددی که از کنار هم قرار گرفتن اعداد سطر (n+1) ام مثلث خیام درست می آید.
نکته: اگر عددی از این بیشتر باشد واحد کامل محاسبه میشود و بقیه ضایع می شود.

سطر ۷
۱ ۴ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۴ ۱
سطر ۸
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟

۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در

سمت راست وجود دارد؟ به ترتیب از چپ به راست با هم برابرند

۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^4$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟
 $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

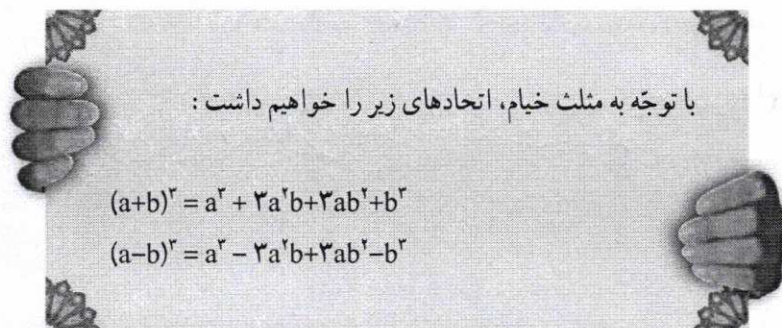
۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟
 $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های

$(a+b)$ وجود دارد؟ ضرایب توان $(a+b)^n$ برابر اعداد سطر $(n+1)$ ام سطرهای واقع در مثلث خیام است.

۷. با توجه به اینکه $a-b = a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^2$ را براساس اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2a^1b + 2ab^1 + b^2$

به دست آورید.
 $(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a^1(-b) + 2a(-b)^1 + (-b)^2$
 $= a^2 - 2a^1b + 2ab^1 - b^2$



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

الف) $(2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1$

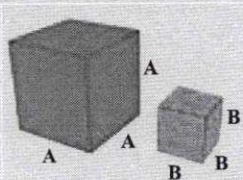
ب) $(\frac{1}{3}a-2)^2 = \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}a + 4$

پ) $(4a-2b)^2 = 16a^2 - 16ab + 4b^2$

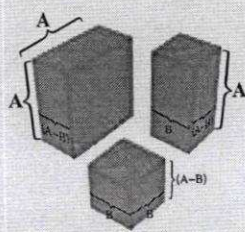
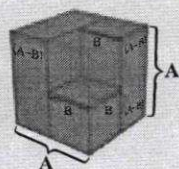
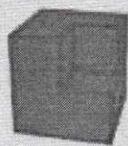
ت) $(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$

$$* (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(جمله اول - جمله دوم) (جمله اول + جمله دوم + جمله سوم) = جمله اول - جمله سوم$$

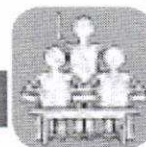


$$A^3 - B^3$$



$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$$

کار در کلاس



با توجه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید. *

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

فعالیت



با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

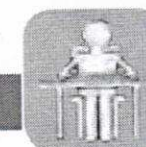
$$8y^3 - 1 = (2y)^3 - 1^3 = (2y-1)((2y)^2 + (2y) + 1) = (2y-1)(4y^2 + 2y + 1)$$

$$8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a+1)((2a)^2 - 2a + 1) = (2a+1)(4a^2 - 2a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$t^3 - \frac{1}{8} = (t)^3 - (\frac{1}{2})^3 = (t - \frac{1}{2})(t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$$

تمرین



۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x-1)^3, (y+\frac{1}{4})^3, (2-\frac{a}{3})^3, (2z-\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^3$$

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + \dots + 2$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + \dots$$

$$(\sqrt{3} + x)^2 = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^2 + \dots$$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1, 1 + z^2, 8 - t^6$$

$$9x^2 - 6x + 1$$

$$25x^2 + 25x + 6$$

$$4x^2 + 14x + 12$$

۴. کدام یک از عبارت‌های زیر، نشان‌دهنده اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای است؟

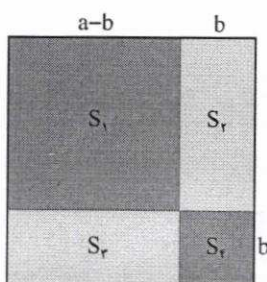
$$(3x + 5)(9x^2 - 20x + 15), (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(4x + y)(16x^2 + 4xy + y^2), (7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

$$\text{الف) } 12x^6(x^2 + 5)^2 - 10x^4(x^2 + 5)^4$$

$$\text{ب) } x^8 - 625x^2$$



۶. مربع روبه‌رو را که اندازه، ضلع آن a است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 را به دست آورید.

ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های S_1, S_2, S_3, S_4 و S به دست آورید.

پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^2 = \dots$$

$$(99)^2 = (100 - 1)^2 = \dots$$

$$(x-1)^2 = (x)^2 - 2(x)(1) + (-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

(-1)

$$(y + \frac{1}{x})^2 = (y)^2 + 2(y)(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2 = y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}$$

$$(2 - \frac{a}{y})^2 = (2)^2 - 2(2)(\frac{a}{y}) + (\frac{a}{y})^2 = 4 - \frac{4a}{y} + \frac{a^2}{y^2}$$

$$(2z - \frac{1}{y})^3 = (2z)^3 - 3(2z)^2(\frac{1}{y}) + 3(2z)(\frac{1}{y})^2 - (\frac{1}{y})^3 = 8z^3 - 6z^2 + \frac{6z}{y} - \frac{1}{y^3}$$

$$(\frac{1}{x} + \frac{b}{y})^3 = (\frac{1}{x})^3 + 3(\frac{1}{x})^2(\frac{b}{y}) + 3(\frac{1}{x})(\frac{b}{y})^2 + (\frac{b}{y})^3 = \frac{1}{x^3} + \frac{3b}{x^2y} + \frac{3b^2}{xy^2} + \frac{b^3}{y^3}$$

$$(a + \sqrt{x})^2 = a^2 + 2\sqrt{x}a + x$$

$$(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$(\sqrt{x} + x)^3 = x\sqrt{x} + 3x^2 + 3x\sqrt{x}x + x^3$$

(-2)

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

(-3)

$$1 + z^3 = (1 + z)(1 - z + z^2)$$

$$1 - t^4 = (1 - t)(1 + t + t^2 + t^3) = (1 - t)(1 + t)(1 + t^2 + t^4)$$

$$9x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(ع)

$$\times (x^4 + 2)(9x^2 - 20x + 15) \rightarrow \text{با } -10x \text{ باشد}$$

$$\checkmark (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\times (x+y)(14x^2 + 5xy + y^2) \rightarrow \text{با } -5xy \text{ باشد}$$

$$\checkmark (7x-2)(49x^2 + 14x + 4)$$

(د)

$$\text{الف) } S_1 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$S_2 = b(a-b) = ab - b^2$$

$$S_3 = (a-b)b = ab - b^2$$

$$S_4 = (b)^2 = b^2$$

$$\text{ب) } S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a^2 - 2ab + \underline{b^2}) + (\underline{ab} - \underline{b^2}) + (\underline{ab} - \underline{b^2}) + (\underline{b^2}) = a^2$$

$$\text{ج) } (a-b)^2 + 2(a-b)(b) + b^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2(a-b)(b) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - \underline{b^2} - 2ab + \underline{2b^2}$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(د)

$$\text{الف) } 12x^2(x^2+2)^3 - 10x^2(x^2+2)^2 = 2x^2(x^2+2)^2 [4x^2 - 5(x^2+2)]$$

$$= 2x^2(x^2+2)^2 (x^2 - 2) = 2x^2(x^2+2)^2 (x-2)(x+2)$$

$$\text{ب) } x^4 - 42x^2 = x^2(x^2 - 42) = x^2(x^2 + 2)(x^2 - 2)$$

$$= x^2(x^2 + 2)(x+2)(x-2)$$

$$\text{✓) } (1001)^3 = (1000+1)^3 = (1000)^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 + (1)^3 = 1000000000 + 3000000 + 3000 + 1$$

$$= 1003003001$$

$$(99)^3 = (100-1)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3$$

$$= 1000000 - 300000 + 300 - 1 = 997000 - 1 = 996999$$

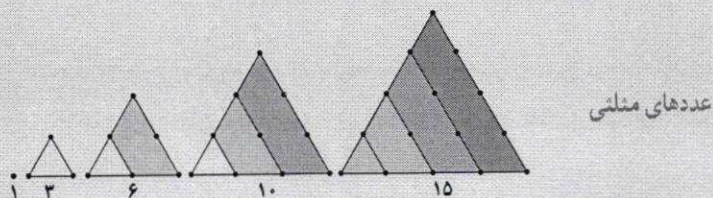
خواندنی

ابوعلی سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و درباره خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

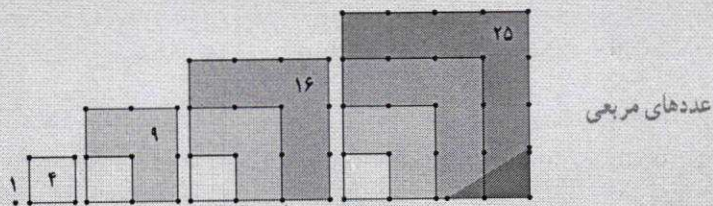
در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله ای به زبان خود ابوعلی سینا در مورد رابطه بین این اعداد آمده است.

همان گونه که مشاهده می کنید ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ... اعداد مثلثی و ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... اعداد مربعی اند.

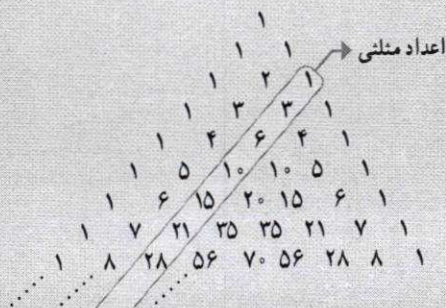
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده اند و می توان یک الگو براساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به دست آورد.



فَيَكُونُ كُلُّ مُرَبَّعٍ مِنْ مُثَلَّثٍ فِي دَرَجَتِهِ وَ مُثَلَّثٍ أَنْقَصَ مِنْ دَرَجَتِهِ بِوَاحِدٍ
مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه

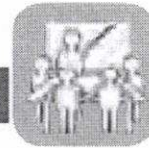


درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها، همچنین با جمع و تفریق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌پردازیم. کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. اگر صورت یا مخرج کسری، پس از ساده شدن، چند جمله‌ای نباشد، در این صورت آن عبارت گویا نیست.

فعالیت



عبارت‌های گویا را با ☒ و عبارت‌های غیرگویا را با ☐ مشخص کنید.

$$\sqrt{x^2} + 1 \quad \text{☐$$

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}} \quad \text{☒$$

$$\frac{x-3}{2x^2-3x+5} \quad \text{☒$$

$$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \text{☐$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{x} \quad \text{☒$$

$$x^2 + 3x - 4 \quad \text{☒$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{☒$$

$$\sqrt{x} \quad \text{☐$$

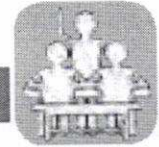
$$\frac{|x|}{x^2+2} \quad \text{☐$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویای $\frac{x+2}{x-5}$ به ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قراردادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

به ازای $z = \frac{5}{3}$ تعریف شده است. $3z = 5$ $z = \frac{5}{3}$ $3z - 5 = 0$ (الف)

به ازای $a = 2$ تعریف شده است. $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ $a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ $(a-2)(a+2) = 0$ $a^2 - 4 = 0$ (ت)
 به ازای $a = -2$ تعریف شده است. $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ $a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$ $(a-2)(a+2) = 0$ $a^2 - 4 = 0$ (ت)
 به ازای $x^2 + 1 \neq 0$ (ج)

کار در کلاس



کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{3z+5}{3z-5}$ ✓

ب) $\frac{x+9}{\sqrt{x}-3}$ ✗

پ) $\frac{4x^2-5x+1}{\sqrt{2}}$ ✓

ت) $\frac{a^2+3}{a^2-4}$ ✓

ث) $\frac{x\sqrt{x}+1}{3-x}$ ✗

ج) $\frac{5x^2+1}{x^2+1}$ ✓

ساده کردن عبارت‌های گویا

اگر a و b و k عددهایی حقیقی باشند؛ به طوری که $k \neq 0$ ، در این صورت داریم:

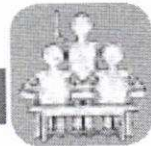
$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k, b \neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k \neq 0$ ، کسر را ساده کرده‌ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\frac{ka}{k}}{\frac{kb}{k}} = \frac{a}{b}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می‌شود. (یادآوری می‌کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می‌زنیم باید مخالف صفر باشد.)

کار در کلاس



۱. مانند نمونه‌های حل شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

$$= \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} = \frac{(x+3)}{(x-3)} \quad (\text{ساده شده کسر})$$

با شرط $x+3 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده‌ایم. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید $x-3 \neq 0$ باشد.

$$\text{ب) } \frac{x^2-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد
تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر
را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

با شرط $x-1 \neq 0$ از صورت و مخرج
کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید
که برای بامعنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$
باشد.

$$= \frac{x+1}{x+1} \quad (\text{ساده شده کسر})$$

$$\text{ب) } \frac{4x^2-9}{4x^2+10x+6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+2)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$\text{ت) } \frac{x^3-8x}{2x^2-8x+8} = \frac{x(x^2-8)}{2(x^2-4x+4)} = \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)(x-2)} = \frac{x(x^2+2x+4)}{2(x-2)}$$

$$\text{ث) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 4x^3(x^2+4)^3}{x^4 - 16x^4}$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^2+y^2}{y^2} = \frac{2x^2+y^2}{y^2} = 2x^2+1$$

فقط اگر بین عوامل صورت و مخرج
ضرب باشد می‌توان جملات را ساده کرد.

۳. فرض کنیم $x=1$ است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $2=1$ است استدلال زیر
را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x=1$$

$$x^2=x$$

$$x^2-1=x-1$$

چون بر عامل صفر تقسیم کرده است.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x+1=1 \xrightarrow{x=1} 2=1$$

$$\text{ث) } \frac{6x^5(x^2+4)^2 - 4x^3(x^2+4)^3}{x^4 - 16x^4} = \frac{2x^3(x^2+4)^2(3x^2-2(x^2+4))}{x^4(x^4-16)}$$

$$= \frac{2x^3(x^2+4)^2(x^2-8)}{x^4(x^4-16)} = \frac{2(x^2+4)(x^2-8)}{x(x^2-4)}$$

$$1) P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$$

$$5) \frac{A(x)}{P(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)^2} = (x+4), \quad \frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{(x-1)^2(x+4)}{(x-1)(x+6)} = (x-1)$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا باید «مخرج مشترک» گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می‌کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌آید.

فعالیت



چند جمله‌ای‌های $P(x) = x^2 - 2x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 5x - 6$ را در نظر بگیرید.

۱. چند جمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.

۲. عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید. $x-1$

۳. عبارت‌های غیر مشترک در تجزیه این دو چند جمله‌ای را مشخص کنید. $(x+6)$

۴. حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیر مشترک پیدا کنید و آن را $A(x)$ بنامید.

۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ، $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.

۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟ **بله**

۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟ **بله ***

۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک نسبت به متغیر x درجه کوچک‌تری دارد؟ $A(x)$

مضرب مشترک دو عبارت
 $(x+1)$ ، $(x-1)$

چند جمله‌ای (x^2-1)
است. از طرفی $(x^2-1)^2$
یا $(x^2-1)^3$

مضرب‌های مشترک این دو
عبارت هستند، اما (x^2-1)
مضرب مشترکی است که
نسبت به متغیر x از درجه
کوچک‌تر است.

برای پیدا کردن مضرب مشترک دو چند جمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ به طوری
که نسبت به x از کوچک‌ترین درجه باشد، ابتدا هریک از چند جمله‌ای‌ها
را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین
توان در عبارت‌های غیر مشترک را به دست می‌آوریم و آن را $A(x)$
می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و
 $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

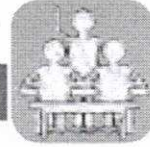
$$1) (x-1)^2(x+4)$$

$$2) (x-1)^2(x+4)$$

$$3) (x-1)^2(x+4)$$

$$4) (x-1)^2(x+4)(x+3)$$

* (۷)



۱. در هر قسمت مضرب مشترکی از چند جمله‌ای‌ها را به دست آورید؛ به طوری که نسبت به متغیر a آن کوچک‌ترین توان را داشته باشد.

الف) $P(x) = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$
 $Q(x) = a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$
 $P \cdot Q = (a+3)^2(a-3)$

ب) $P(x) = a^2 - b^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b)$
 $Q(x) = a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
 $P \cdot Q = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

پ) $P(x) = a^2 + 2a^2 - 3a^2 = a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a-1)(a+3)$
 $Q(x) = a^2 + 8a^2 + 15a = a(a^2 + 8a + 15) = a(a+3)(a+5)$

اشتباه جایی (باید ۱۵ باشد)

جواب = $a^2(a+3)(a-1)(a+5)$

حاصل ضرب عبارت‌های
غیر مشترک

حاصل ضرب عبارت‌های
مشترک با بزرگ‌ترین توان

۲. برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. مخرج مشترک همان مضرب مشترک بین مخرج‌ها با کوچک‌ترین توان نسبت به x است. در زیر مخرج مشترک کسر‌ها را مانند نمونه پیدا کنید.

الف) $\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}$

مخرج کسر اول $A(x) = x^2 + x = x(x+1)$

مخرج کسر دوم $B(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x-1)(x+1)^2$

مخرج مشترک $= x(x-1)(x+1)^2$

ب) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2}$

$P \cdot Q = (x-3)(x+2)$

مخرج کسر اول $= x-3$

مخرج کسر دوم $= x+2$

پ) $\frac{1}{x^4 - 8x} - \frac{1+x}{x^2} + \frac{x+2}{x-2}$

مخرج کسر اول $= x^4 - 8x = x(x^3 - 8) = x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

مخرج کسر دوم $= x^2$

مخرج کسر سوم $= x-2$

$P \cdot Q = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 4)$



فعالیت

عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

$$\text{مخرج مشترک} = x(x-1)(x+1)$$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{زیرا:}$$

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x)}{(x-1)(x+1)(x)}$$

۳. همان طور که می بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده اند. در زیر این دو کسر را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1) + x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x - 4 + x^2}{x(x-1)(x+1)}$$



کار در کلاس

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x+1)(x-1)$ است؛ بنابراین داریم:

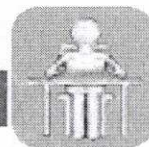
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

$$x^2 - 1$$

$$\begin{aligned}
 * \text{ت) } \frac{2n+3}{2n-2} - \frac{5}{n^2-1} - \frac{2n-3}{2n+2} &= \frac{2n+3}{2(n-1)} - \frac{5}{(n-1)(n+1)} - \frac{2n-3}{2(n+1)} \\
 &= \frac{(2n+3)(n+1) - 5(2) - (2n-3)(n-1)}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2n^2+2n+2n+3-10-2n^2+2n+3n-3}{2(n-1)(n+1)} \\
 &= \frac{4n-10}{2(n-1)(n+1)} = \frac{2n-5}{(n-1)(n+1)} = \frac{2n-5}{n^2-1} \\
 \text{ب) } \frac{y+1}{y^2+y-2} + \frac{y-2}{y^2+2y} &= \frac{y+1}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-2}{y(y+2)} \\
 &= \frac{(y+1)y}{y(y+2)(y-1)} + \frac{(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y^2+y+y^2-3y+2}{y(y+2)(y-1)} = \frac{2y^2-2y+2}{y(y+2)(y-1)} \\
 \text{پ) } \frac{f+x^2-2x}{2+x} - \frac{x-2}{1} &= \frac{f+x^2-2x+x-2}{2+x} = \frac{f+x^2-x-2}{2+x} \\
 &= \frac{f+x^2-x-2}{2+x} = \frac{-4x}{2+x}
 \end{aligned}$$

$$* \text{ت) } \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2}$$

تمرین



۱. عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

الف) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ب) $\frac{2x^2+1}{x^2+4}$

پ) $\frac{5}{x^2+x}$

ت) $\frac{x^2+3x^2+2x}{x(x+1)(x^2-4)}$

ث) $\frac{3x^2y+6xy^2}{x^2}$

ج) $\frac{42a^3-3a^3m}{am^2-25a}$

چ) $\frac{b^2x^2-ab^2x^2}{a^2b^2x^2-a^2b^2x}$

ح) $\frac{x^6-a^6}{ax^3-a^3x}$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^2} + 1$

ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1$

پ) $\frac{\frac{1}{m}+1}{m+1}$

ت) $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

ث) $\frac{x+3}{x^2-6x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{5}{3-x}$

ج) $\frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

①

$$a) x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

به ازای $x=1, x=-1$ تعریف شده است.

ب) $x^2 + 4 \neq 0$ به ازای تمام اعداد تعریف شده است.

$$c) x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

به ازای $x=0, x=-1$ تعریف شده است.

$$d) x(x+1)(x^2-4) = 0 \quad x(x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 0$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

به ازای $x=0, x=-1, x=2, x=-2$ تعریف شده است.

ه) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ به ازای $x=0$ تعریف شده است.

$$z) am^2 - 2da = 0 \quad a(m^2 - 2d) = 0 \quad a(m-d)(m+d) = 0$$

$$a = 0$$

$$m-d=0 \Rightarrow m=d$$

$$m+d=0 \Rightarrow m=-d$$

به ازای $a=0, m=d, m=-d$ تعریف شده است.

$$e) a^2 b^2 x^2 - a^2 b^2 x = 0 \quad a^2 b^2 x(x-a) = 0 \begin{cases} a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ x = 0 \\ x-a = 0 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

به ازای $a=0, b=0, x=0, x=a$ تعریف شده است.

$$g) ax^3 - a^3 x = 0 \Rightarrow ax(x^2 - a^2) = 0 \quad ax(x-a)(x+a) = 0$$

$$a = 0$$

$$x = 0$$

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a$$

به ازای $a=0, x=0, x=a, x=-a$ تعریف شده است.

$$\text{اف} \quad \frac{f}{a^2 x} - \frac{ax}{y^2 y^2} + 1 = \frac{f(2y^2)}{y^2 x y^2} - \frac{ax(3x)}{y^2 (3x)} + \frac{1(12xy^2)}{1(12xy^2)} = \frac{12y^2 - 12x^2 + 12xy^2}{12xy^2} \quad (-2)$$

$$ب) \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{1(x-1)}{1(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$ج) \frac{\frac{1}{m} + 1}{m+1} = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1(m)}{1(m)}}{m+1} = \frac{\frac{1+m}{m}}{\frac{m+1}{1}} = \frac{1(1+m)}{m(1+m)} = \frac{1}{m}$$

$$د) \frac{yn}{x^2-y^2} + \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n-y} = \frac{yn}{(x-y)(n+y)} + \frac{1(n-y)}{(n+y)} - \frac{1(x+y)}{(n-y)}$$

$$= \frac{yn + n - y - x - y}{(n-y)(n+y)} = \frac{yn - 2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{y(n-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{y}{x+y}$$

$$ه) \frac{x+3}{x^2-4x+9} - \frac{x+2}{x^2-9} - \frac{a}{3-x} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$- \frac{a(x-3)(x+3)}{-(x-3)(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+4x+9 - x^2+x+4 + ax^2-5a}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{ax^2+5x-5}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$ز) \frac{y-3}{y^2-5} - \frac{y+2}{y^2-4y+5} - \frac{2}{2-y} = \frac{(y-3)(y-2)}{(y-2)(y+2)(y-2)} - \frac{(y+2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)} - \frac{2(y-2)(y+2)}{-(y-2)(y-2)(y+2)}$$

$$= \frac{y^2-5y+4 - y^2-4y-5 + 2y^2-8}{(y-2)^2(y+2)} = \frac{y^2-9y-9}{(y-2)^2(y+2)}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

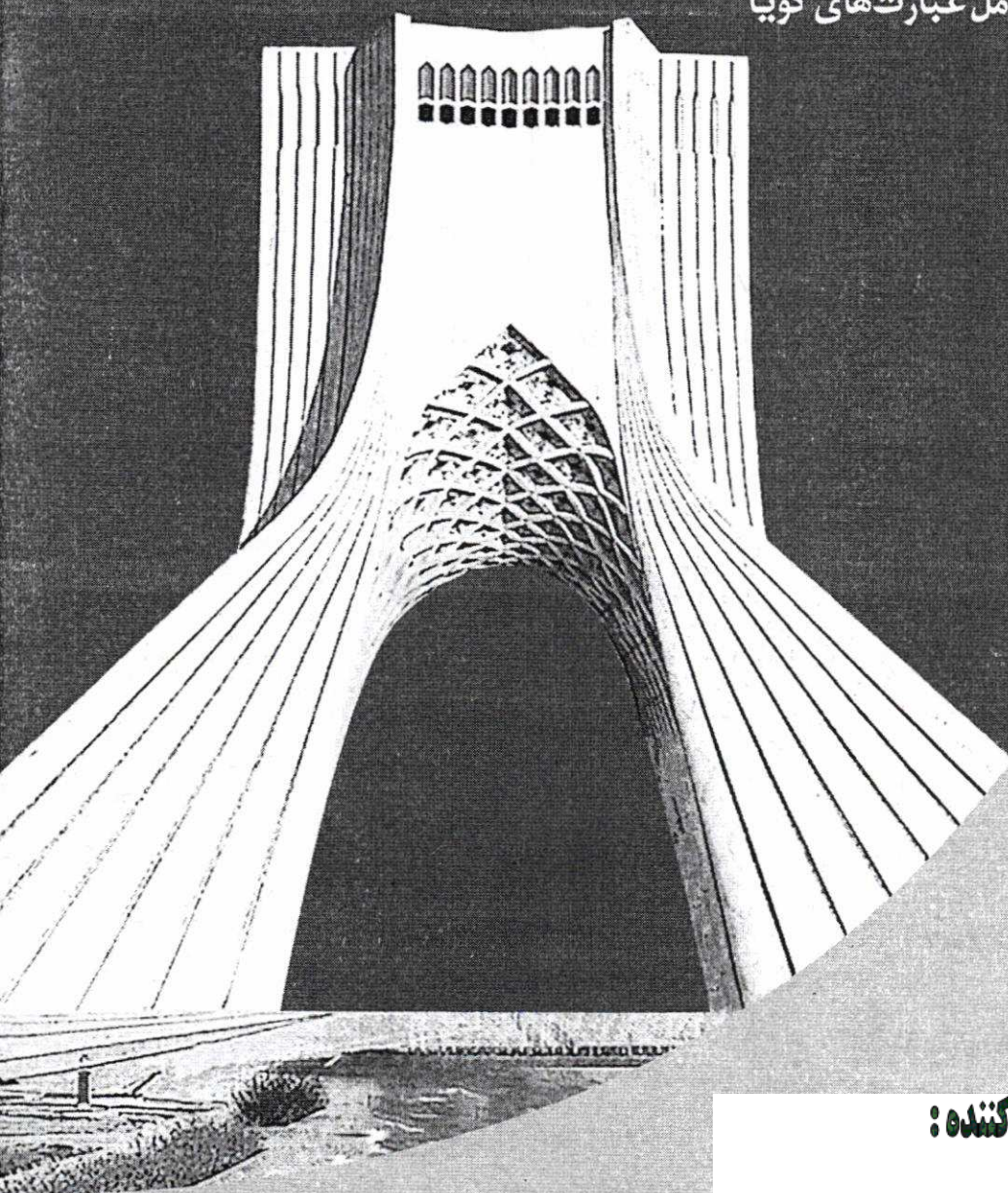
فصل دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها

درس ۳ معادلات شامل عبارت‌های گویا



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس ۱

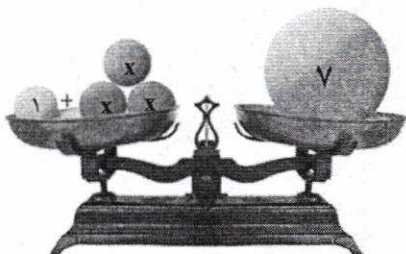
معادله و مسائل توصیفی

معادله $4x + 2 = 10$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود.
 $x = 2$ را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



$$1 + 3x = 7$$

$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

فعالیت



$x = ?$ عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل $2x + 1$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل $5x - 4$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید. (چرا؟) چون:

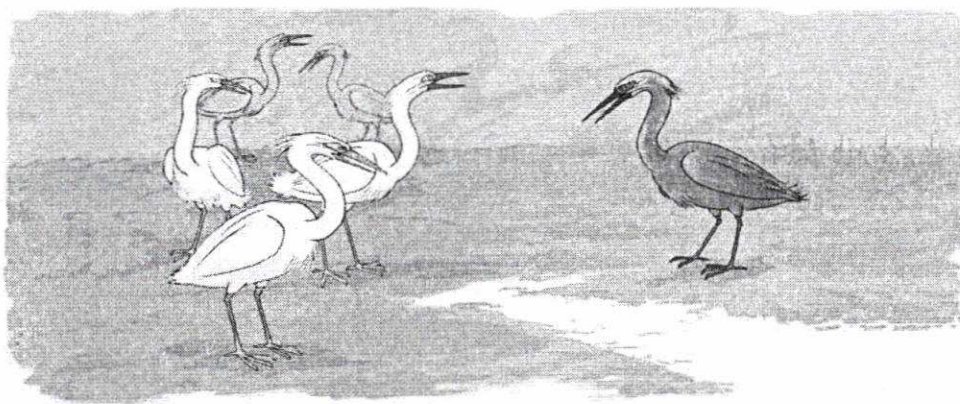
$$ax+b=0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

طرف تقسیم بر $(a \neq 0)$

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم». لطفاً به پرندۀ کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را x فرض کنیم:

نصفه ای از نصف ما:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$$

$$100 = 1 + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} \Rightarrow 100 = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + x \Rightarrow 100 = 1 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{3}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{99 \times 4}{3} = 132$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ چون $\frac{3}{4}x$ توان (درجه) متغیر x است. (* برابر با 1 است)

ضرایب a و b کدام اند؟ $\frac{3}{4}x - 99 = 0$

$$\boxed{a = \frac{3}{4}} \quad \boxed{b = -99}$$

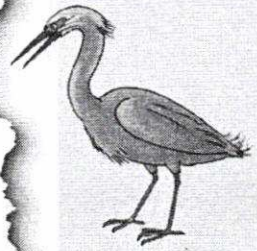
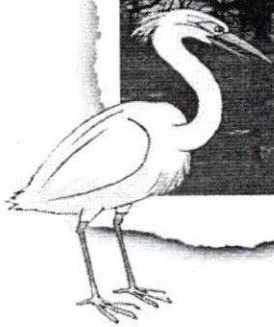
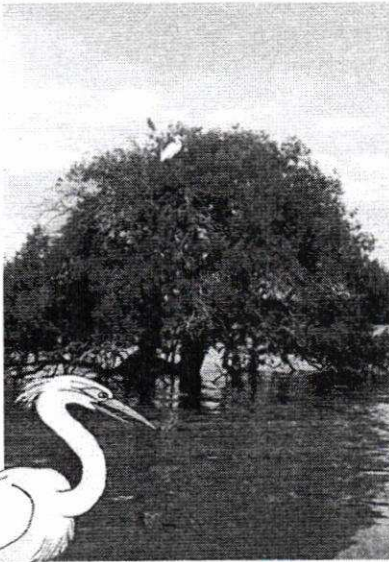
* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

✱ جنگل حرا، جزیره قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

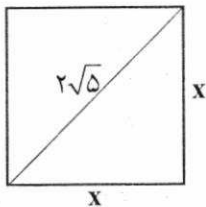


یادی از گذشته



فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۲

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.



به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

$$\dots x^2 + \dots x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

بنابراین:

$$2x^2 = \frac{20}{2} \dots \Rightarrow x^2 = \dots 10 \dots \Rightarrow x = \pm \sqrt{10}$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر $x = \sqrt{10}$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = 4\sqrt{10}$$

معادله $2x^2 = 20$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟ بله
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟ چون معادله‌ی $x^2 = 3x$ را به یک تساوی درست عددی تبدیل می‌کنند.

$$x=0, x=1, x=-3, x=4, x=3$$



توجه: به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, x(x-3) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=3$$

$$x=0 \text{ یا } x-3=0$$



یادآوری:

اگر $a \times b = 0$ باشد

نتیجه می‌گیریم:

$$b=0 \text{ یا } a=0$$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

است که در آن $a \neq 0$ ضرب x^2 .

b ضرب x و c عدد ثابت است.

(مثال)

$$3x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

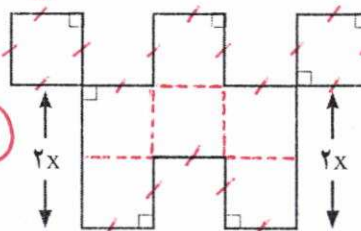
$$a=3, b=-\sqrt{7}, c=\frac{1}{5}$$

۲. در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه

مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.

$$18x^2 = 18x(x) = 18x^2 \text{ (مساحت یک مربع به ضلع } x \text{)} = \text{مساحت شکل}$$

$$22x = 18x + 2x + 2x = \text{مجموع اضلاع} = \text{محیط شکل}$$



$$18x^2 = 22x$$

$$18x^2 - 22x = 0 \Rightarrow x(18x - 22) = 0$$

$$18x^2 - 22x = 0 \Rightarrow x(18x - 22) = 0$$

$$18x^2 - 22x = 0 \Rightarrow x(18x - 22) = 0$$

$$18x^2 - 22x = 0 \Rightarrow x(18x - 22) = 0$$

$$18x^2 - 22x = 0 \Rightarrow x(18x - 22) = 0$$

$$x = \frac{11}{9}$$

علاقه مندان
طول ضلع‌های دیگر
متر باشند

عدد بدون واحد (چون بر واحد هیچ وقت حساب نمی‌کنیم) و ضلع برابر نمی‌شوند چون هم واحد نیستند

یادآوری:

$$18x^2 = 22x$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر $x-3$ است. بنابراین:

$$(۱) \quad ۱-۳=۵$$

$$x \times (x-3) = 40$$

$$(۵) \quad ۵-۳=۲$$

آیا می توانید جواب های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه ۲

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟ خیر، $x=-5$ غیر قابل قبول است، چون سن نمی تواند عدد منفی باشد.

$$۱-۳=۵ \quad \text{سن نیما}$$

$$۵-۳=۲ \quad \text{سن پسرعمو نیما}$$

تمرین



۱. هر کدام از عبارت های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$

مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس

و ۱۲ فن ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون

تومان حقوق پرداخت می کند. حقوق یک فن ورز در این کارخانه ماهیانه

چقدر است؟



۳. با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود

را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع

تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

ب) اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$\frac{14x}{14} = 44$$

$$x=4$$

$$۱۲x + ۸x + ۴x + ۲x + x = ۳۱x \Rightarrow ۳۱ \times ۴ = ۱۲۴$$

$$۱۲x - x = ۱۱x = ۱۱ \times ۴ = ۴۴$$

$$\text{حقوق مهندس} = ۲x \quad \text{حقوق مدیر} = \frac{2}{3} \times ۲x = \frac{4}{3}x$$

$$۲x = \text{حقوق مهندس}$$

$$\frac{4x}{3} = \text{حقوق مدیر}$$

$$۳ \times \frac{4x}{3} + ۸ \times ۲x + ۱۲ \times x = ۵۵.۵$$

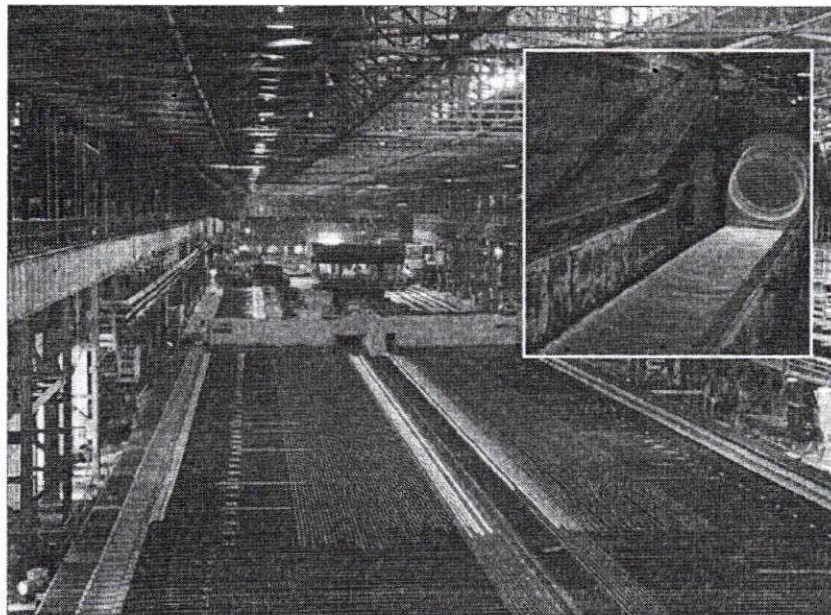
$$۳۷x = ۵۵.۵ \Rightarrow x = \frac{۵۵.۵}{۳۷} \Rightarrow x = ۱.۵$$

تهیه کننده:

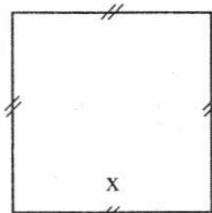
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کارخانه ذوب آهن اصفهان

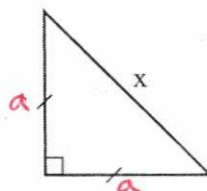
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره‌برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



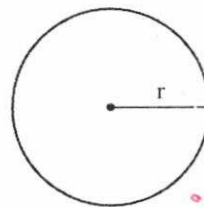
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟ $x=?$



شکل (۱) مساحت مربع $= x^2$



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{1} \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$a^2 + a^2 = x^2$$

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{مجموع مساحت‌ها} = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{1 \times 2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2 \times 2} = 7 \Rightarrow \frac{7x^2}{4} = 7 \Rightarrow x^2 = \frac{7 \times 4}{7} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2$$

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	س
۱۵	س
۱۶	ش
۱۷	ص
۱۸	ض
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	ه
۳۲	ی

بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت ax^n مشخص شده اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=4$) و دارای دو نقطه است ($n=2$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{غنچه} & : & \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{چ} & + & \text{ه} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 31 & + & 7x^2 & + & 29x & + & 22x \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{معادل ریاضی غنچه}} 22x + 29x + 7x^2 + 31$$

حال با توجه به توضیح فوق:

۱- جدول زیر را کامل کنید:

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$2x^1 + 1x^1$	الف + ب = آب
$3x^3 + 1$	آپ
$4x^2 + 12 + 11x$	ذرت

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.
 $4x^2 + 28 + 8 + 12 + 12 + 2x^1 + 28 + 1x^1 + 32 + 3x^3$

۳- آیا می توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

$$28 + 1x + 27 + 15$$

سلام

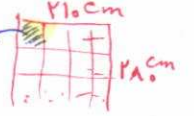
$$28 + 4x^2 + 15 + 31 + 30 + 4x^2 + 4x^2 + 15 + 30 + 10 + 29x^1 + 28$$

من دوست تو هستم

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

عینی در این قالی، ۱۲۰۰ مربع ۷×۷ وجود دارد. $\frac{۲۸۰ \times ۲۱۰}{۷ \times ۷} = ۱۲۰۰$ مساحت قالی = مساحت یک مربع ۷×۷



تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷ = $\frac{۵,۸۸۰,۰۰۰}{۱۲۰۰} = ۴۹۰۰$

برای سیدالین، تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷×۷ = $\sqrt{۴۹۰۰} = ۷۰$

سیدالین قالی، ۷۰ رج دارد. $\Rightarrow$ تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷×۷ = ۷۰ رج $\Rightarrow$ جلین سوزن

۶. اگر در یک قالی با ابعاد $۲/۸۰ \text{ m} \times ۲/۱۰ \text{ m}$ (که عموماً ۲×۳ نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی

۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد: $\downarrow$ ۲۸۰ cm $\downarrow$ ۲۱۰ cm تبدیل به cm

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره ۱ cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟ $۵,۸۸۰,۰۰۰ \times ۱ \text{ cm} = ۵,۸۸۰,۰۰۰ \text{ cm} \div ۱۰۰ = ۵۸,۸۰۰ \text{ m}$ تبدیل به متر

ج) یک قالی با فاف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی ببافد. اگر این قالی با فاف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟ $x = ۳۰۰۰۰$

د) اگر این قالی با فاف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد

هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این

قالی با فاف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$\frac{۵,۸۸۰,۰۰۰}{۳۰۰۰۰} = ۱۹۶$ سوزن ۱۹۶ هفته طول می‌کشد

درآمد $۳۵,۰۰۰,۰۰۰ - ۵,۴۰۰,۰۰۰ =$ سود

$= ۲۹,۴۰۰,۰۰۰$

میزان سود در ۱۹۶ هفته

$\frac{۲۹,۴۰۰,۰۰۰}{۱۹۶} = ۱۵۰,۰۰۰$

میزان سود در یک هفته



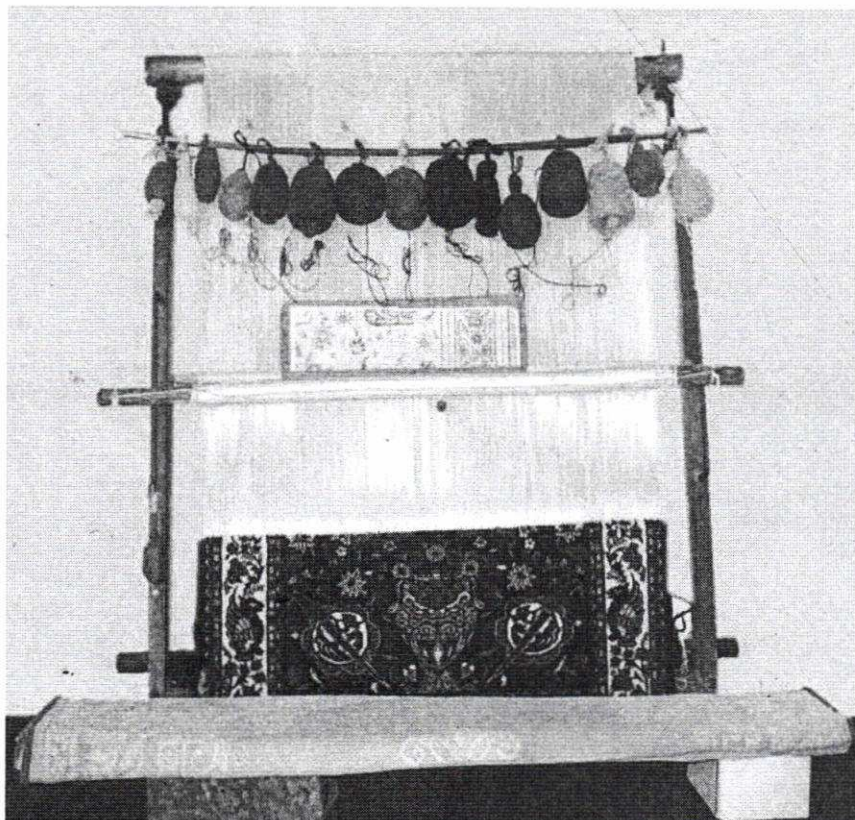
۱. «رج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در ۷ cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی ۵ رج، وجود ۵ گره در یک ضلع مربع ۷×۷ است.

رج قالی = تعداد گره‌های قالی در ۷ cm طول یا عرض قالی

صنعت قالی بافی



یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی بافی است. در این حرفه به نخ‌های که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تاروپود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافنده قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تاروپود قالی است.



درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

بر خلاف آنچه در «کار در کلاس های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است توان جواب های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم.

درس اول: تجزیه عبارت های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می کنیم:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{اتحاد مربع مجموع دو جمله ای} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله ای} \end{aligned}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد جمله مشترک}$$

فعالیت



طرف دوم تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

الف) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(2x + \frac{1}{2})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

ب) اتحاد مزدوج: $(x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$

ت) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

ب) اتحاد مربع ۲ جمله ای: $(2 + 3xy)^2 = 4 + 12xy + 9x^2y^2$

ت) اتحاد جمله مشترک: $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

جمله مشترک x جمع غیر مشترک در ۲: $(-4-2) \times x = -6x$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

یادآوری:

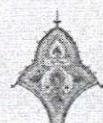
شکل کلی معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
اتحاد مربع تفاضل دو جمله	$x^2 + 6x = 0$	$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$ $\Rightarrow x = 0$ یا $x = -6$ پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.
عامل یابی (فاکتورگیری)	$x^2 + 6x + 9 = 0$	$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$ <u>ریشه مضاعف</u>
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 16 = 0$	روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$ $\Rightarrow x = 4$ یا $x = -4$ روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$
اتحاد مربع مجموع دو جمله	$x^2 + 5x + 6 = 0$	$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x = -3$ یا $x = -2$
اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$ $(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 5$ <u>ریشه مضاعف</u>



در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ فاکتورگیری

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟ هنگام بیان سمت چپ تساوی را به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ می‌نویسند

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ $b = 0$

آیا علامت‌های a و c مهم است؟ بله - باید مختلف‌العلامت باشند.

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟ اتحاد مربع دو جمله‌ای

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$x^2 + 9 = 0$ و $-x^2 - 5 = 0$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $(x)^2 \quad 2(x)(\sqrt{2}) \quad (\sqrt{2})^2$

① جواب: $(الف) 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$
 (روش دوم: فاکتورگیری)

(ب) $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$
 روش دوم: $x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

(پ) $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{x}$

$x^2 - x + \frac{1}{x} = 0$ اتحاد مربع مجهول

$(x - \frac{1}{x})^2 = 0$

$(x - \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = 0$

$x = \frac{1}{x} \text{ یا } x = \frac{1}{x}$

ریشه مضاعف

(روش دوم: ضرب طرفین در x و بعد استفاده از اتحاد مشترک)

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

$2x(x - 4) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = 4$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

اتحاد مربع مشترک

$(x - 3)(x - 2) = 0$

$x = 3 \text{ یا } x = 2$

(ح) $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$x = 0 \text{ یا } x = 3$

(ع) $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

(خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 2) = 0$

$x = -2 \text{ یا } x = -2$

ریشه مضاعف

(ز) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$

$(3x + 2)(3x - 1) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

(ذ) $(x - 3)^2 = 4$

$x - 3 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \\ x - 3 = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$
 $\begin{matrix} -2 \otimes +1 = -3 \\ -4 \oplus +1 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} +2 \otimes -1 = -3 \\ +4 \oplus -1 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} +2 \otimes -2 = -4 \\ +4 \oplus -2 = -2 \end{matrix}$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$\Rightarrow (x - 1)(x + 4) = 0$

$\Rightarrow (x - 1) = 0 \text{ یا } (x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -4$

2) $4x^2 - (2 - x)^2 = 0$

(2x)

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$(2x - (2 - x))(2x + (2 - x)) = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$

$\begin{matrix} 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{matrix}$

تمرین



1. معادلات زیر را حل کنید.

(ب) $x^2 - 2x^2 = 0$

(ب) $(x + 2)(x - 3) = x - 3$

(الف) $2x^2 - 8 = 0$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{x}$

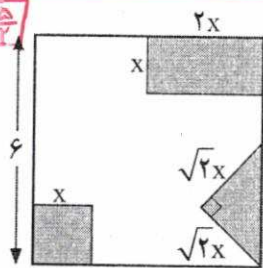
(خ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(ح) $x^2 = 5 - x^2$

(ج) $\frac{x^2}{3} = x$

(ذ) $(x - 3)^2 = 4$

(د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$



2. از مربعی به ضلع 6 cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm² است.

مساحت باقی‌مانده = مساحت مربع - مساحت مربع کوچک - مساحت مثلث = 36 - x^2 - (1/2)x^2 = 24

است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

$36 - x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 24 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2} \text{ یا } x = -2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$

3. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ و $x = -3$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$x = 2 \text{ یا } x = -3$

$x - 2 = 0 \text{ یا } x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + (-2 + 3)x + (-2)(3) = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 1x - 6 = 0$

جواب ۴) $x=1$ یا $x=1$
 $x-1=0$ یا $x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0$
 $x^2-2x+1=0$

جواب ۵) سمت الف) $k=2 \Rightarrow (x-1)^2=2$
 $x-1=+\sqrt{2}$ یا $x-1=-\sqrt{2}$
 $x=1+\sqrt{2}$ یا $x=1-\sqrt{2}$

۴) معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟
 ۵) در معادله $(x-1)^2=K$:

جواب ۵) $k=4 \Rightarrow (x-1)^2=4$
 $x-1=+2$ یا $x-1=-2$
 $x=3$ یا $x=-1$

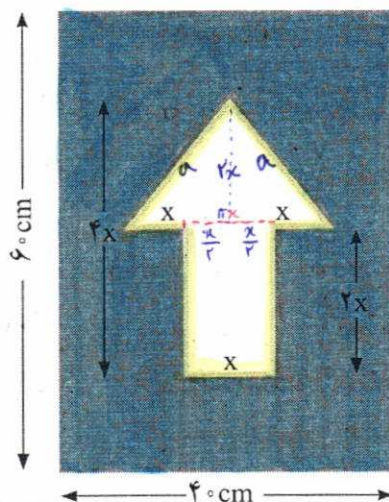
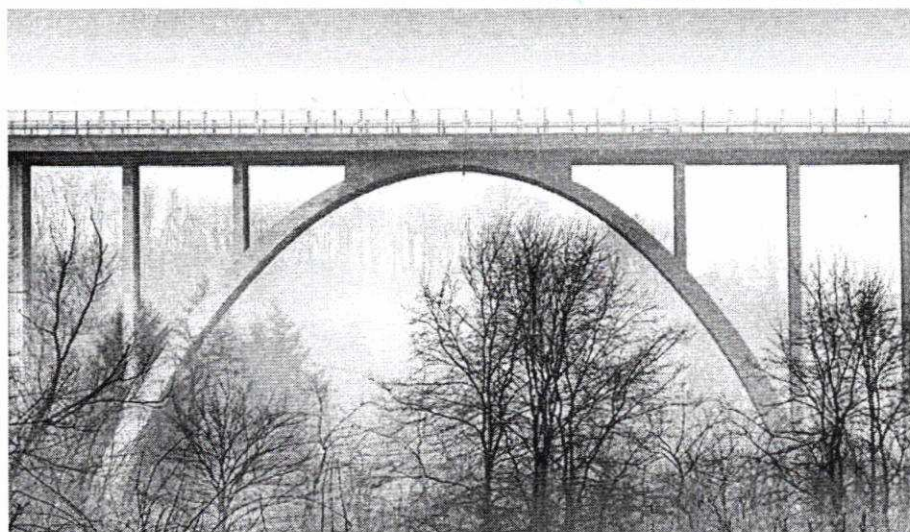
الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2, K=4, K=0$ و $K=-9$ به دست آورید.

جواب ۵) $k=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$
 $(x-1)(x-1)=0$
 $x=1$ یا $x=1$
 ریشه مضاعف

ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه مضاعف دارد؟ $k=0$
 پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه حقیقی دارد؟ $k > 0$ (مقادیر مثبت k)
 ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟ $k < 0$ (مقادیر منفی k)

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید 3° تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی 1° تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی $27,000$ تومان شده است.

جواب ۶) $k=-9 \Rightarrow (x-1)^2=-9$
 سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی غیر ممکن است یا اینکه اعداد منفی ریشه دوم ندارند پس معادله جواب ندارد.



الف) اندازه x چقدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه رو از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو $34,800$ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

مساحت مثلث + مساحت مستطین = مساحت مثلث سفید

$= \frac{1}{2} \times x \times 2x + x \times 2x = 5x^2$ (مساحت کل)

مساحت کل - مساحت تابلو = مساحت مثلث سفید
 $5x^2 = 24000 - 100x$

$100x^2 = 27000 \Rightarrow 1500x^2 + 24000 - 500x^2 = 27000$

$(24000 - 500x^2) \times 100 = 240000 - 50000x^2$

$100x^2 = 30000 \Rightarrow x^2 = 300 \Rightarrow x = \pm\sqrt{300} \Rightarrow x = +\sqrt{300}$

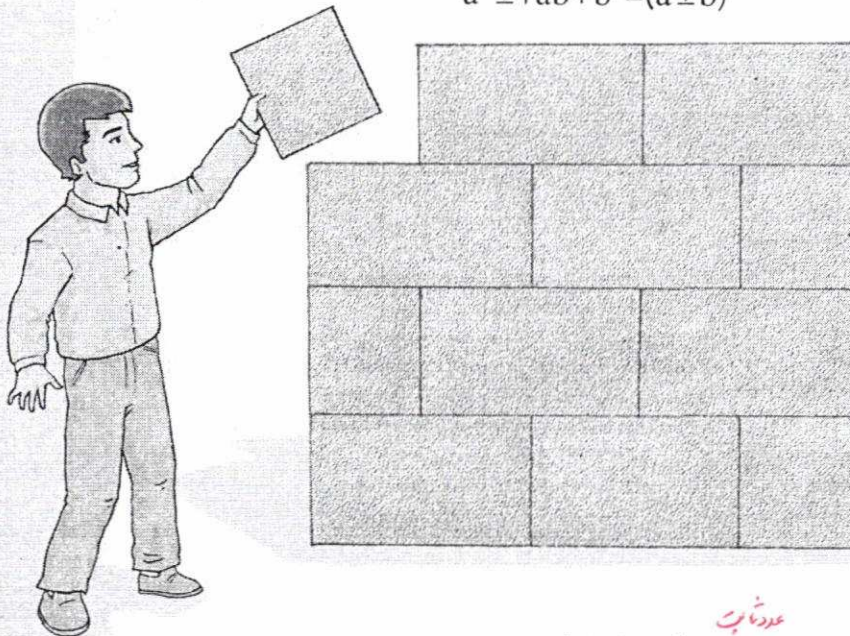
ب) مساحت کل = $2a + 3x + 2(2x) = 4(\frac{a}{2}x) + 3x + 4x = 12x$
 هزینه رنگ آمیزی: $1500x^2 + 24000 - 500x^2 + 1200x = 34800$

$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x+18)(x-6) = 0$
 $x = -18$ یا $x = 6$

$a^2 = (x + \frac{a}{2})^2 + (2x)^2$
 $a^2 = \frac{a^2}{4}x^2 + a + 4x^2$
 $a = \frac{a}{4}x$

روز دوم: مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

عبارت جملات شامل x در هر سمت
تساوی باشند.

۱- ابتدا قرینه عدد ثابت معادله؛ یعنی $..... + 5$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = -5 \quad (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

۲- اگر ضریب x^2 مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب x^2 تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را بر عدد 2 تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{-5}{2}$$

(۲)

در عبارت $\frac{3}{2}x$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دوجمله ای $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله $2ab$ ، $\frac{3}{2}x$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{-5}{2} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \quad (3)$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a^2 $b \times a$ b^2 $(a+b)^2$

بنابراین:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$

با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{49}{16}} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

پس جواب‌های معادله $2x^2 + 3x - 5 = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

هستند. $x = -\frac{5}{2}$ و $x = 1$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی

زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{4}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{4}$ و عرض x در نظر بگیریم:

$$x^2 + \frac{3}{4}x = \frac{5}{2}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{4}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول $\frac{3}{8}$ در تساوی (۲):

$$x^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right)x = x^2 + \frac{3}{4}x$$

خواندنی

و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع x^2 ، تساوی بالا به صورت زیر در می آید:

$$x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ دارد.

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

$(x + \frac{3}{4})^2$ مساحت مربع (بزرگ)

$$= \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16}$$

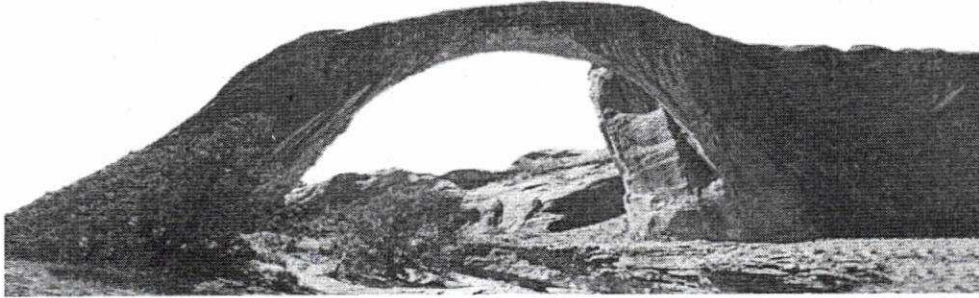
$$\rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

جزء طرفین

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x=1$ و $x=-\frac{5}{2}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x=-\frac{5}{2}$ معنی پیدا نمی کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2 + px = q$ و با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هرچند همه معادلات درجه دوم را نمی توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \text{فرم استاندارد -1}$$



$$\frac{2x^2}{2} - \frac{6x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

مسابقه

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x + \frac{1}{3}x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$x^2 - 2x + \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

$$(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9}$$

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots \\ x = \dots\dots\dots \end{cases}$$



جذر

$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}} \\ x = \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{5}{9}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \times 3}{1 \times 3}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 - 4 \rightarrow x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) = -4 \rightarrow x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4} = \frac{-16 + 25}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 + 2 = 0 + 2 \rightarrow x^2 + 2x = 2$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{8 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ یا } x = -\frac{1}{2}$$



$$x^2 + 4x + 9 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = -9 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{4}{2}x\right) = -9 \rightarrow x^2 + 2\left(\frac{4}{2}x\right) + 4 = -9 + 4 = -5$$

$$(x + 2)^2 = -5 \rightarrow (x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$$

$$9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

روش دوم: روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

۱- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (1)$$

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

ضرب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می کنیم:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (3)$$

عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه گیری از طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

دلتا

عبارت $b^2 - 4ac$ را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

بر اساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟) چون اعداد حقیقی، ریشه دوم ندارند.

فعالیت



۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.
بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن $a = 4$ ، $b = 7$ ، $c = -2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

بصراحت مثال نمی آید از معادلاتی که استاندارد شده نشسته و یا Δ آنها جذرها را می نژارد حل شود.
همچنین مثال برای $\Delta = 0$ و داشتن ریشه مضاعف حل شود.

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

معادله ۲ ریشه دارد.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$

معادله ۲ جواب دارد.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2(4)}$

$x_1 = -\frac{7}{4} \quad x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4} + 1 = -\frac{3}{4} = \frac{-b}{a}$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

۳) جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن $a=3 \quad b=1 \quad c=7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

کار در کلاس



معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a, b, c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح ر حل چند مسئله کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

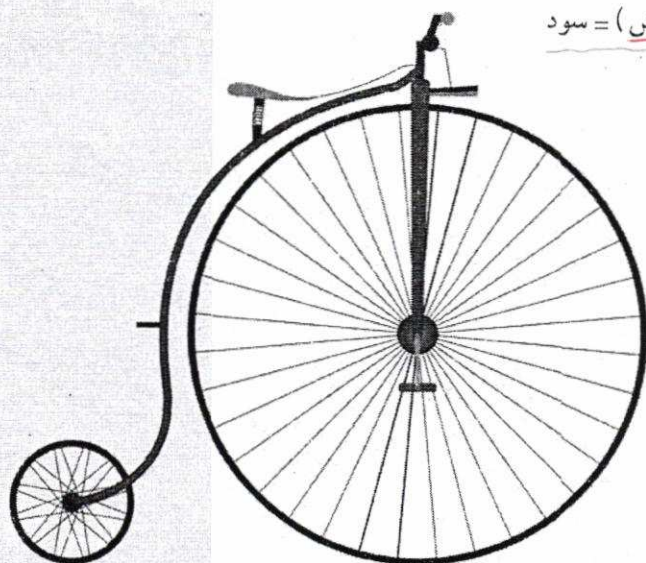
تابع هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{هزینه} - \text{درآمد (فروش)} = \text{سود}$



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

هزینه اولیه برای دست : ۷۰۰۰۰

هزینه تولید هر دوچرخه : ۱۱۰ هزار تومان

اشغال باقی ۷۰۰۰۰

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه $70,000 - 200v$ به دست آید :

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

■ حل :

$$R(x) = \text{درآمد} = (\text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه}) = (70,000 - 200v) \times 7 = 70,000v - 200v^2$$

$$C(x) = \text{هزینه} = \text{هزینه اولیه} + \text{هزینه تولید} = 70,000 + 110(70,000 - 200v) = 14,700,000 - 22,000v$$

$$P(x) = \dots\dots$$

مسئله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -0.0045x^2 + 1.15x - 100$ چتر از رابطه

به دست می آید.

$$x=0 \Rightarrow P(0) = -0.0045(0)^2 + 1.15(0) - 100$$

$$P(0) = -100$$

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد،

چقدر از دست می دهد؟ ۱۰۰ واحد

ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک بنگاه

اقتصادی را نشان می دهد که در

آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها

برابر می شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.



هزینه درگاه
(سود نه ضرر)

۲۰۰۰ چتر

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

برای کارگاه سودآور است؟ کی بشیر، یعنی ۲۰۰۱ آمین چتر

$$P(x) = 0 \text{ در نقطه سر به سر}$$

$$-0.0045x^2 + 1.15x - 100 = 0$$

$$\Delta = (1.15)^2 - 4(-0.0045)(-100) = 44.8025$$

معادله
دارد

$$x = \frac{-1.15 \pm \sqrt{44.8025}}{2(-0.0045)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \approx 12,345 \\ x \approx 2000 \end{array} \right.$$

$$x = 2000$$

حل ۱) $x^2 - x + 5 = 0$
 معادله ریشه ندارد. $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$

(۳) $x^2 - 4x + 1 = 0$
 معادله ریشه مضاعف دارد. $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 0$
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

(۵) $3x^2 - x + 4 = 0$
 معادله ریشه ندارد. $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = -47 < 0$

(۲) $2x^2 + x - 1 = 0$
 معادله ۲ ریشه دارد. $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ یا } x = -1$

(۴) $x^2 + 17x - 18 = 0$
 معادله ۲ ریشه دارد. $\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 349 > 0$
 $x = \frac{-17 \pm \sqrt{349}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -18$

تمرین



۱. معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

(۱) $x^2 - x + 5 = 0$
 (۲) $2x^2 + x - 1 = 0$
 (۳) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
 (۴) $x^2 + 17x - 18 = 0$
 (۵) $3x^2 - x + 4 = 0$
 (۶) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

۲. معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را به دست آورید.
 $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0$
 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$ و $x_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -1$
 $x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2}$

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟
 $x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \Rightarrow 16 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -44 \Rightarrow a = -11$

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

$$3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

۵. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟
 الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(-1) = a^2 + 4 > 0$
 ب) $x^2 - x + a = 0$ $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$
 ج) $x^2 + ax + 1 = 0$ $\Delta = a^2 - 4(1)(1) = a^2 - 4$

۶. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر $x = -1$ و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{c}{a}$ است.
 $x_1 \times x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

۸. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$)، یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow x = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$ یا $x = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

※ حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

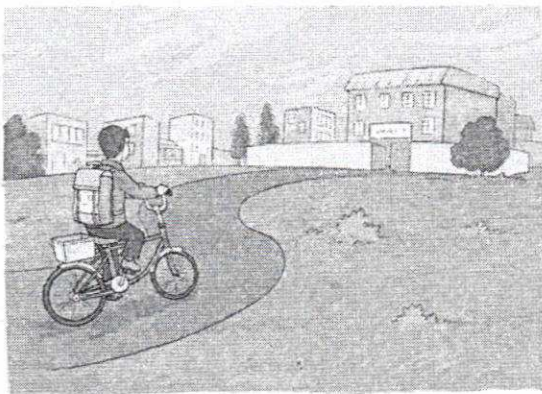
توجه: در حل تمرین ۳، می‌توان عبارت یافتن مقدار مجموع a ، از مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها، برای یافتن ریشه‌ی دوم استفاده کرد.

جواب ۵) $\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$
 $\Delta = (a-c)^2 > 0 \rightarrow$ معادله ۲ ریشه دارد.
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a} \\ x = \frac{-a-c+a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1 \end{cases}$

درس ۳

معادلات شامل عبارت‌های گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۲/۵
۱۰۰۰ ÷ ۲۵۰۰
موتور

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

$$15 = \frac{250}{t}$$

۲. برای $15 = \frac{250}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{250}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با 15 جمع کنید.

$$\frac{250}{t} - 15 = 15 - 15 \Rightarrow \frac{250}{t} - 15 = 0$$

۳. با مخارج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{250}{t} - 15 \times \frac{t}{t} = 0 \Rightarrow \frac{250 - 15t}{t} = 0$$

۴. کسری که مخارج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین

$$250 - 15t = 0$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$250 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 250 \Rightarrow t = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3} \text{ ساعت}$$

$$16\frac{2}{3} \times 60 = 1002 \text{ دقیقه}$$

دستور: $4 + 1002 = 1006$
زمان مربوط به علی مسیر از در منزل تا سر خیابان اصلی
از خیابان اصلی تا مدرسه

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟) **چون تقسیم عدد بر صفر تعریف نشده است.**

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2}{1} = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{(x-1)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8 + x^2-4x+5 - x^2+6x-5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-8}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4)(x-2)=0 \Rightarrow x=-4, x=2$$

مثال: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است. **عقده**
(مخرج کسرها صفر نرند)

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$(ب) \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 4 - x^2 - 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(ب) \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\frac{24(10+m)}{(10+m)(10-m)} + \frac{1(10-m)(10+m)}{(10-m)(10-m)} = \frac{24(10-m)}{(10-m)(10-m)}$$

$$240 + 24m + 100 - m^2 - 240 + 24m = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$(10-m)(10+m) = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$\Delta = (-48)^2 - 4(-1)(100) = 2304 + 400 = 2704$$

$$\Delta = 2704 > 0$$

$$m = \frac{+48 \pm \sqrt{2704}}{-2} = \frac{48 \pm 52}{-2}$$

$$m = -50 \quad \text{یا} \quad m = 2$$

حل: $x=1$ را در معادله قرار می دهیم و سپس مقدار a را به دست می آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1) - 2}{(a+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسره های معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی کنند، پس هردو قابل قبول اند.

کار در کلاس



معادله های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئله کاربردی از معادلاتی عبارت های گویا دارند



۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

حل: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x

در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان

قبل از ذوب شدن برابر با $9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x+100$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جواب (ت)

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$\frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-3)(3-y)}{(y-3)(y+3)} + \frac{y-1}{y-3}$$

$$\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y-3+y-1}{y-3}$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{2y-4}{y-3}$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{(2y-4)(y+3)}{(y-3)(y+3)}$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{2y^2 - 5y + 6}{(y-3)(y+3)}$$

$$-y-6 = 2y^2 - 5y + 6$$

$$-2y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(-2)(-12) = 16 - 96 = -80$$

$$\Delta = -80 < 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{-80}}{-4}$$

$$y = \frac{4 - \sqrt{80}i}{-4} \quad \text{یا} \quad y = \frac{4 + \sqrt{80}i}{-4}$$

جواب (ث)

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$$

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow 4-a=0$$

$$a=4$$

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

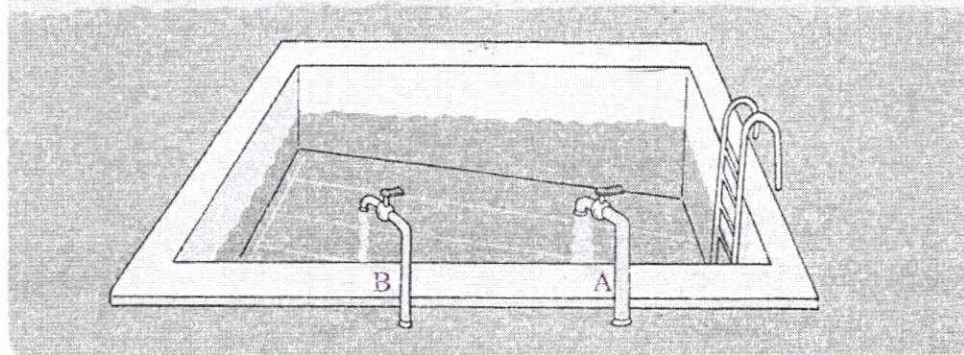
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (9x+100 \neq 0 \text{ با شرط})$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 900 گرم است.

۲) دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پُر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می شود.



■ حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پُر می شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پُر می شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 12(x-10) + 1 \times 12x}{12x(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 34x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x}{12x(x-10)} = 0$$

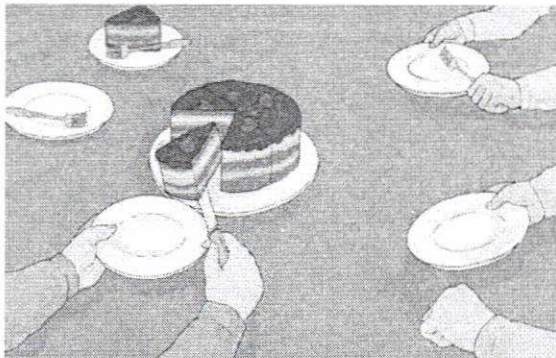
$$\begin{aligned} x^2 - 34x + 120 &= 0 \\ (x-20)(x-6) &= 0 \\ x &= 20 \quad \text{یا} \quad x = 6 \end{aligned}$$

$$\Delta = 34^2 - 4(-1)(-120) = 476$$

$$\Delta = 476 > 0 \text{ معادله ۲ ریشه دارد}$$

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{476}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = 6 \end{cases}$$

(یعنی شیر B استخر را در ۲۰ ساعت، شیر A در ۱۰-۲۰=۱۰ ساعت و دو شیر با هم در ۱۲ ساعت پُر می کنند)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هریک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

حل: فرض کنید در ابتدا n نفر بوده اند؛ بنابراین به هریک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هریک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هریک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ به دست می آید.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6 = n(n+1) \Rightarrow 6 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(6) = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

$$n = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -3$$

تصویر: تعداد افراد در ابتدا ۲ نفر است.

۱) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

۴) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

۵) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

۶) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۷) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸) هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۹) به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-64}$ دارای جواب $t=-3$ است.

$t=-3 \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-64}$

این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

$\frac{7}{1} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow \frac{(27+k) \times 1}{32} - \frac{7}{1} = 0 \Rightarrow \frac{27+k-224}{32} = 0 \Rightarrow k-200 = 0 \Rightarrow k=200$

جواب ۷: $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{1 \times (k+2) + 1 \times k}{k \times (k+2)} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{k+2+k}{k(k+2)} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{2k+2}{k(k+2)} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{k+1}{k(k+2)} = \frac{1}{11}$

$-2k^2+14k+24=0 \Rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-2)(24) = 244 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد.

$k = \frac{-14 \pm \sqrt{244}}{-4} \Rightarrow k = 4 \text{ یا } k = -4$

جواب ۸:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times (x+3) + 1 \times x}{x \times (x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(2x+3) = x(x+3) \Rightarrow 8x+12 = x^2+3x \Rightarrow x^2-5x-12=0$

$-x^2+5x+12=0$

$\Delta = 25+48 = 73$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2}$

$$① \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$\frac{(3x-5) \times (x+3)}{(x+3) \times (x+3)} - \frac{1 \times (x+3)}{1 \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x+5-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{2x+2}{x+3} = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$② \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\frac{(3x-2) \times (x+3)}{x \times (x+3)} + \frac{(2x+5) \times x}{(x+3) \times x} - \frac{5 \times x \times (x+3)}{1 \times x \times (x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+9x-2x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

$$③ \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{(x+2) \times 1}{(x+2) \times 1} - \frac{(x+3) \times (x+2)}{1 \times (x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$$

$$-x^2-4x-4=0 \quad \text{یا} \quad x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \xrightarrow{\text{جذر}} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{دو معادله جواب ندارد چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \rightarrow x=-2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{دو معادله جواب ندارد چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

تهیه کننده:

$$④ \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{(x^2-2x+2) \times 1}{x(x-2) \times 1} - \frac{(1+x) \times (x-2)}{x \times (x-2)} - \frac{(x-1) \times x}{(x-2) \times x} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-2-x+2}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x+4=0 \Rightarrow x=4 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 2$$

$$\boxed{x=-2} \quad \text{یا} \quad x=+2 \quad \text{غرض} \rightarrow \text{چون مخرج کسر را صفر می کند}$$

$$⑤ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\frac{3 \times (x+3)(x-2)}{(x-1) \times (x+3) \times (x-2)} - \frac{2 \times (x-1)(x-2)}{(x+3) \times (x-1) \times (x-2)} - \frac{4 \times (x-1)(x+3)}{(x-2) \times (x-1) \times (x+3)} = 0$$

$$\frac{3x^2-3x-18-2x^2+4x-4-4x^2-12x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2-5x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$$

$$-3x^2-5x-10=0 \quad \text{یا} \quad 3x^2+5x+10=0 \quad \Delta = 5^2 - 4(3)(10) = 25 - 120 = -95$$

$$\Delta = -95 < 0$$

معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{\cancel{1-x} \cdot \cancel{-(x-2)}} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad ; \quad \text{این معادله جواب ندارد.}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

سؤالات تکمیلی ریاضی و آمار دهم انسانی
(فصل دوم : معادله ی درجه ی دوم)

۱- معادله های درجه ی دوم زیر را به روش خواسته شده حل کنید :

الف) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(روش تجزیه)

ب) $x^2 + 10x - 11 = 0$

(روش مربع کامل)

ج) $5x^2 - 3x + 7 = 0$

(روش کلی)

۲- اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله ی درجه ی دوم در ستون بعدی است ، با یک خط به یکدیگر وصل کنید . سپس معادله ها را در ستون آخر حل کنید .

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
عامل یابی (فاکتورگیری)	$9x^2 - 25 = 0$	
اتحاد مربع دو جمله ای	$3x^2 + 9x = 0$	
اتحاد مزدوج (روش ریشه گیری)	$x^2 - 10x + 16 = 0$	
اتحاد جمله مشترک	$x^2 - 8x + 16 = 0$	

۳- معادله ی $(x+4)^2 = a$ ، به ازاء چه مقادیری از a :

ج) ریشه ی حقیقی ندارد

ب) دو ریشه ی حقیقی دارد

الف) ریشه ی مضاعف دارد

۴- معادله ی درجه دومی بنویسید که $x = -3$ ریشه ی مضاعف آن باشد .

۵- اگر x_1, x_2 ریشه های معادله ی $5x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند ، بدون حل معادله ، مجموع و حاصلضرب ریشه ها را به کمک فرمول به دست آورید .

۶- معادله ی درجه ی دومی بنویسید که :

الف) ریشه ی مضاعف دارد ب) دو ریشه ی حقیقی دارد ج) ریشه ی حقیقی ندارد

۷- به کمک اتحادها ، جاهای خالی را با جمله ی مناسب کامل کنید :

الف) $(2x + \dots)^2 = 25y^2 + 4x^2 + 20xy$

ب) $(xy - 3)(xy + 8) = x^2y^2 + \dots - 24$

ج) $\left(5x - \frac{1}{4}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{16}$

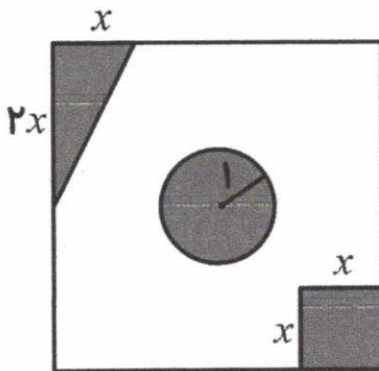
د) $(2x + y)(\dots - \dots) = 4x^2 - \dots$

هـ) $(3 - \dots)^2 = \dots - 12xy + \dots$

و) $(x + 4)(x - \dots) = x^2 + \dots - 12$

ز) 96×104

۸- در زمینی مربعی شکل به ضلع $10m$ سه باغچه ی کوچک به شکل زیر ساخته شده است . مساحت زمین باقیمانده $85m^2$ است . طول x را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۹- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $4\sqrt{2}$ است .

۱۰- مجموع معکوس دو عدد فرد طبیعی متوالی $\frac{12}{35}$ است . آن دو عدد را پیدا کنید .

۱۱- معادله های کسری زیر را حل کنید .

الف) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$

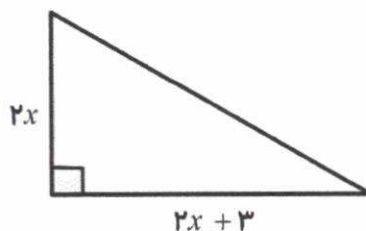
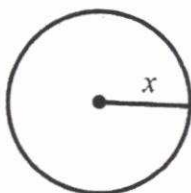
ب) $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$

ج) $\frac{x^2+4}{x} = 5$

د) $2x-1 = \frac{3x}{1-x} + 2$

۱۲- به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{m} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟

۱۳- مساحت دایره و مثلث با هم برابر است . قاعده و ارتفاع مثلث و شعاع دایره را حساب کنید . (عدد π را ۳ در نظر بگیرید)



۱۴- تعداد جواب های معادله های زیر را فقط تعیین کنید .

الف) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

ب) $2x^2 + 4x + 7 = 0$

ج) $x^2 + 1 = 0$

د) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

۱۵- نام اتحادهای زیر را نوشته و سمت راست آن ها را بنویسید .

الف) $(x-5)(x+5) = \dots\dots\dots$

ب) $(2x+x^2)^2 = \dots\dots\dots$

ج) $(3x-2)(3x+7) = \dots\dots\dots$

د) $(a-7)^2 = \dots\dots\dots$

۱۶- سود حاصل از فروش x پیراهن در یک تولیدی ، از رابطه ی $P(x) = x^2 + x - 12$ به دست می آید .

الف) اگر این تولیدی ، هیچ پیراهنی نفروشد ، چقدر از دست می دهد ؟

ب) به ازاء چه تعداد فروش پیراهن ، تولیدی به نقطه ی سر به سر خود می رسد ؟

ج) چندمین تولید پیراهن ، برای این تولیدی سودآور است ؟

۱۷- یک پیتزا را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر کدام مقداری مساوی رسید. سپس یک نفر به آنها اضافه شد و دوباره پیتزا را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر کدام $\frac{1}{6}$ کمتر رسد. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

۱۸- تابع درآمد و تابع هزینه هفتگی یک کارخانه به صورت زیر است:

تابع هزینه $C(x) = 100 + x$ ، تابع درآمد $R(x) = 21x - x^2$

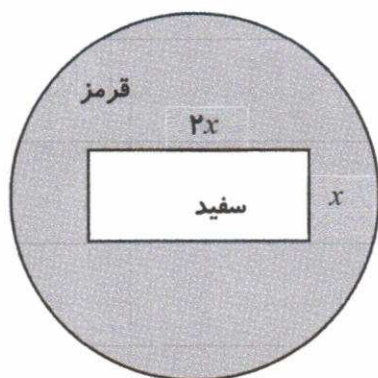
الف) معادله سود این کارخانه را بنویسید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند کالا حاصل می شود؟

۱۹- برای ساخت یک تابلو مانند شکل زیر، از برچسب های قرمز و سفید استفاده می شود.

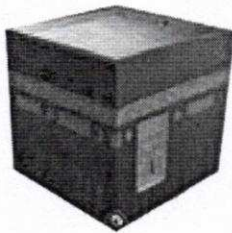
هزینه ی 1 cm^2 برچسب سفید ۲۰ تومان و هزینه ی 1 cm^2 برچسب قرمز ۱۰ تومان است. (مساحت دایره ۲۴۰ سانتی متر مربع است). مجموع هزینه های برچسب های سفید و قرمز ۳۴۴۰۰ تومان شده است.

اندازه ی x چقدر است؟



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



تابع

فصل سوم

مفهوم تابع

درس ۱

ضابطه جبری تابع

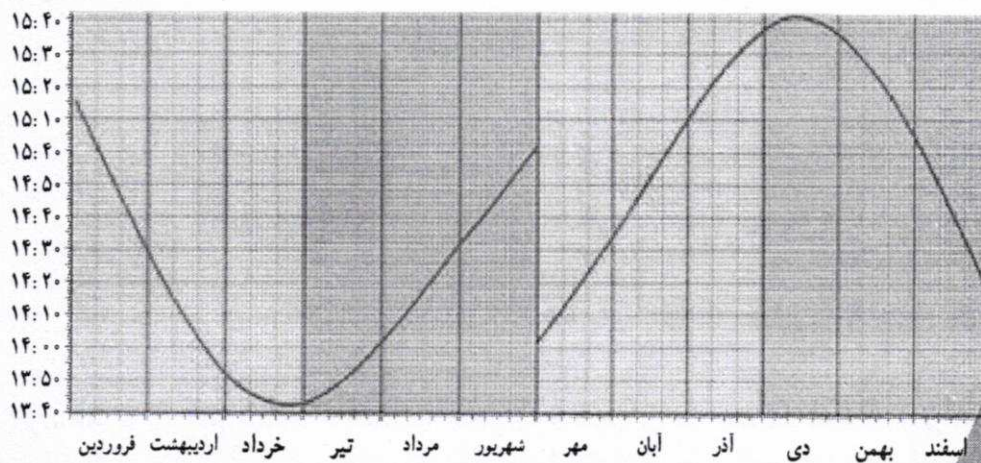
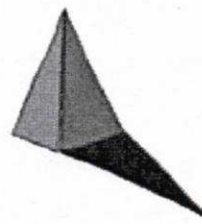
درس ۲

نمودار تابع خطی

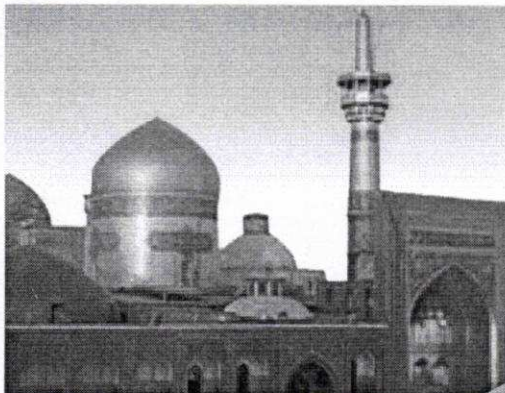
درس ۳

نمودار تابع درجه ۲

درس ۴



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می گیرد.



یکی از شیوه های جهت یابی قبله استفاده از سایه شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می گیرد می توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	۳	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	۴	۵	۸	۹	۱۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) بر اساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها بر اساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۲	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{3}{2}$
y	۱	-۷	-۳	۲	۲	۳	۰

$$y = -2x + 3$$

$$y = -2(3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$-2x + 3 = 3 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{-2} \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$y = -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک‌تر شد از ورید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان
تابع منظور ما، «پیوسته» است
«حد»، به آمیالِ دلِ ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می‌کند
حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند
هر کسی تابی‌نهایت را شناخت
چون «مُجانب» سوی آن بالا شناخت



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

طول قد و نماسوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۵۴-۴۵ قرار داشته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

۲۵ = نماسوب

$$25 \times (1.89)^2 = 89.3025$$

$$189 \div 100 = 1.89 \text{ متر}$$

تبدیل به متر شود

فعالیت



می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = 3.14$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟ بله

۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟ بله $p = 2\pi r$

۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟ شعاع (۲) متغیر مستقل

۴. جدول زیر را کامل کنید. محیط (P) و مساحت (S) متغیر وابسته

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	0.785π	4π	9π	16π
P بر حسب سانتی‌متر (محیط)	2π	3π	4π	6π	8π

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ نیز y تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$

مشتق دوم

یک مثال از تساوی دو زوج مرتب زده شود

فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	$\frac{1}{3}$	۱	$\sqrt{2}$	۲
y	-۲	۱	$\frac{2}{3}$	۴	$3\sqrt{2}+1$	۷
(x, y)	$(-1, -2)$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(1, 4)$	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}+1)$	$(2, 7)$

$$3x+1=1 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{3} \Rightarrow x=0$$

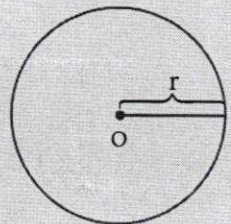
$$3x+1=3\sqrt{2}+1 \Rightarrow 3x=3\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

$$y=3(1)+1=3+1=4$$

$$y=3(2)+1=6+1=7$$



$$\frac{2\pi r}{2r} = \pi$$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشتم هـ. ق توانست عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتاب رساله محیطیه خود را با این جمله شروع می‌کند: «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است».

$$y = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$x^2 + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} - 1 \quad x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	1	2	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	...	-1
y	2	5	$\frac{5}{4}$	...	2

$$y = x^2 + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{وزن بر حسب کیلوگرم} = \frac{\text{نماتوب}}{\text{مجدور طول قد بر حسب متر}}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow$ $\text{نماتوب} < 19$

ب) شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow$ $19 \leq \text{نماتوب} < 25$

پ) شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow$ $25 \leq \text{نماتوب} < 30$

ت) شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow$ $\text{نماتوب} \geq 30$

گروه سنی	نماتوب
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

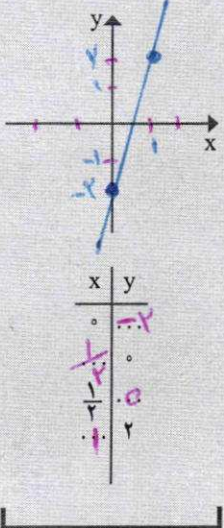
پس از یافتن نماتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{توان دوم یا مربع قد بر حسب متر} \times \text{نماتوب} = \text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز درمی‌یابید که وزن مطلوب به نماتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق



نمودار خط $y = 4x - 2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید:



$$y = 4(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$y = 4\left(\frac{1}{4}\right) - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

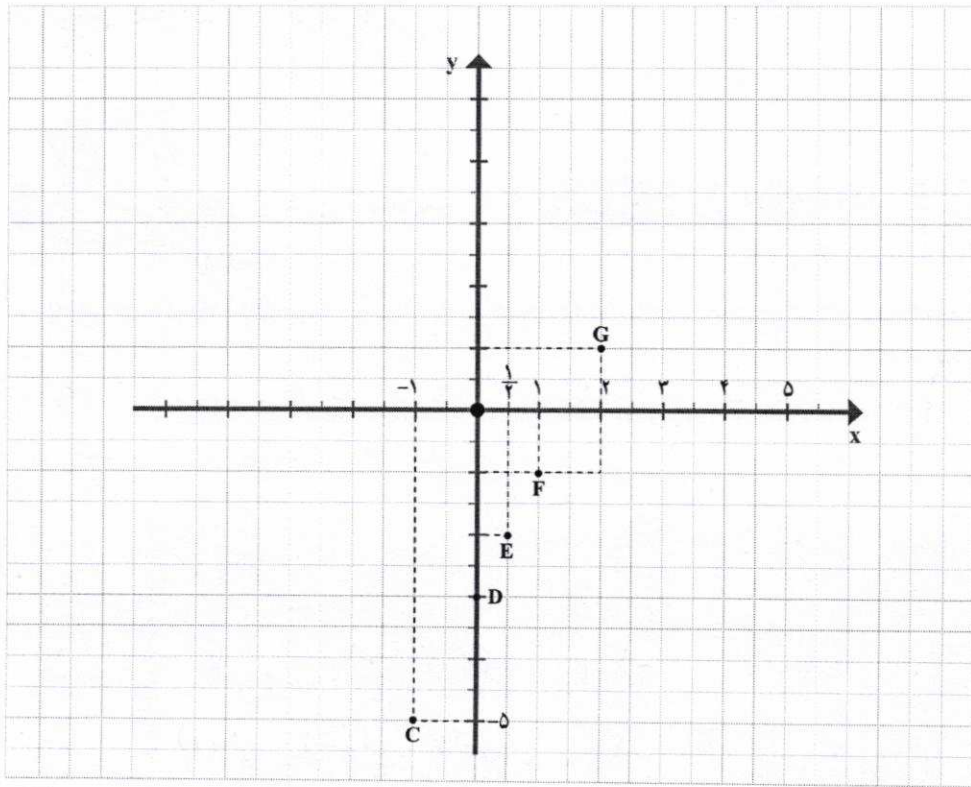
$$4x - 2 = 2 \Rightarrow 4x = 2 + 2 \Rightarrow$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 1$$

تهیه کننده:

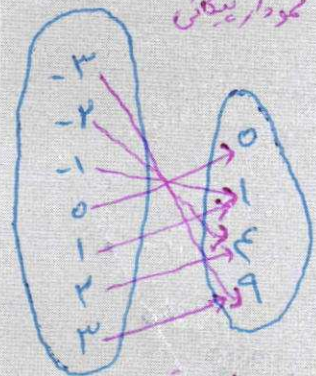
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر هر یک از «زوج مرتب» های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:

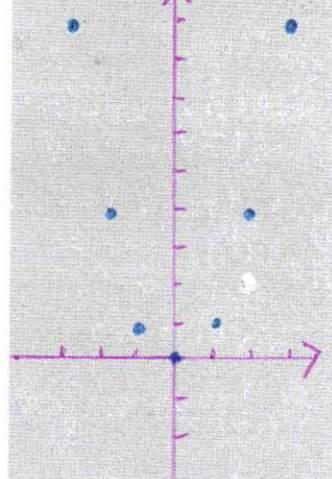


$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (-3)^2 = 9 \\ y &= (-2)^2 = 4 \\ y &= (-1)^2 = 1 \\ y &= (0)^2 = 0 \\ y &= (1)^2 = 1 \\ y &= (2)^2 = 4 \\ y &= (3)^2 = 9 \end{aligned}$$

نمودار بیگانه



نمودار مختصاتی



◆ سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار بیگانه و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

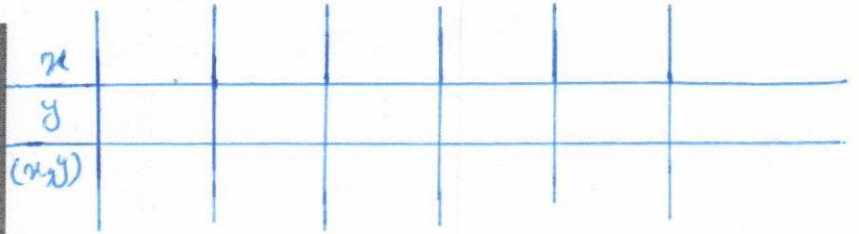
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9
(x, y)	(-3, 9)	(-2, 4)	(-1, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(2, 4)	(3, 9)

مفهوم تابع

در تمام فعالیت ها، مثال ها و تمرین های قبل، رابطه ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می نامند. به عبارت دقیق تر:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.



۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:



کار در کلاس

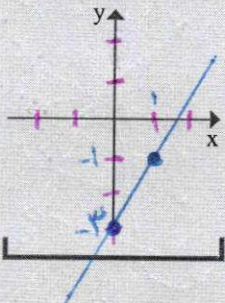
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
y	-5	-3	-2	-1	1	$y = 2x - 3$
(x, y)	(-1, -5) C	(0, -3) D	($\frac{1}{2}$, -2) E	(1, -1) F	(2, 1) G	



نمودار خط $y = 2x - 3$ را
روی دستگاه مختصات
رسم کنید:

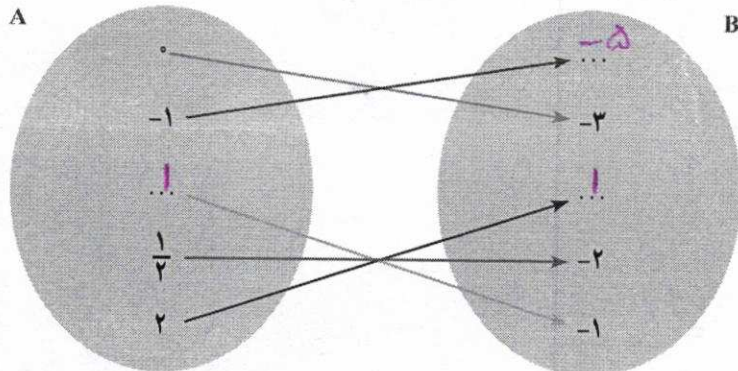


$$y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$(0, -3)$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$(1, -1)$$



سوال خوب

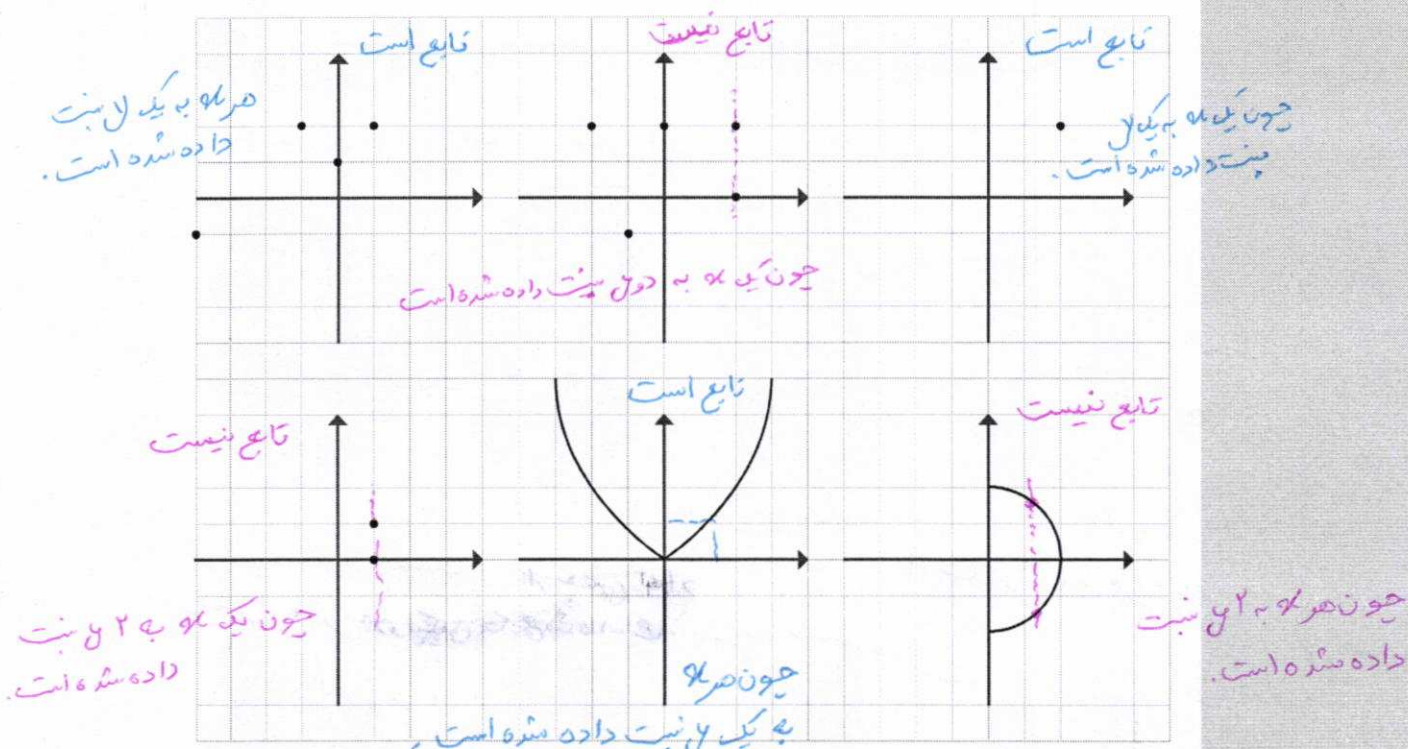
$$D: y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$$

$$E: y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$F: y = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$G: y = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

یک شهر ممکن است چند سوغاتی داشته باشد.

تابع است ☐ تابع نیست ☒

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

هر فرد یک روز تولد دارد.

تابع است ☒ تابع نیست ☐

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

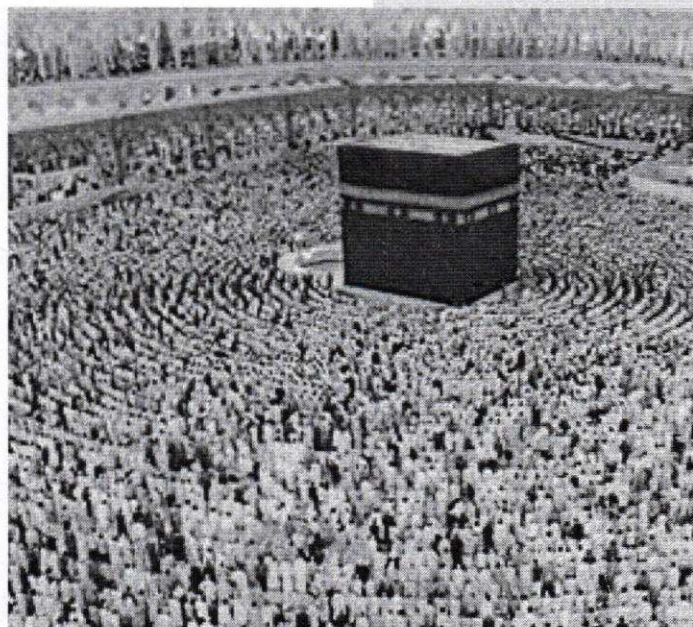
چون ممکن است یک شهر چند نماینده داشته باشد.

تابع است ☐ تابع نیست ☒

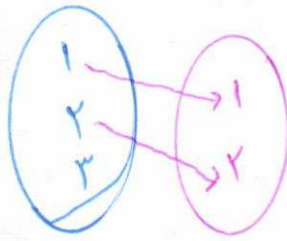
ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

تابع است ☒ تابع نیست ☐

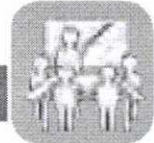
در اسلام مسلمان یک قبله دارد.



در فعالیت زیر بهتر است یک مثال به این صورت نیز آورده شود

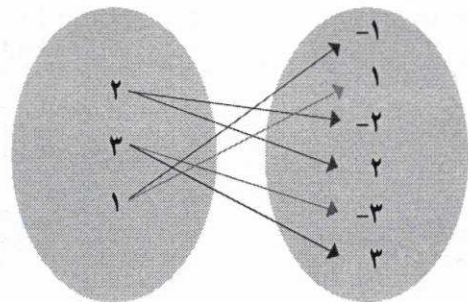
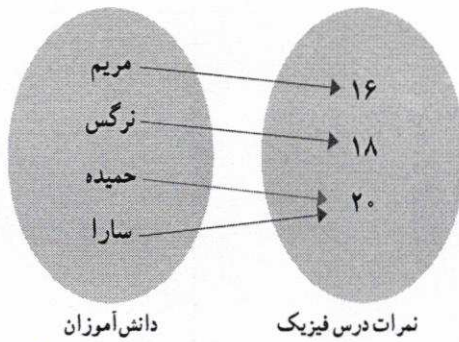


که تابع نیست



فعالیت

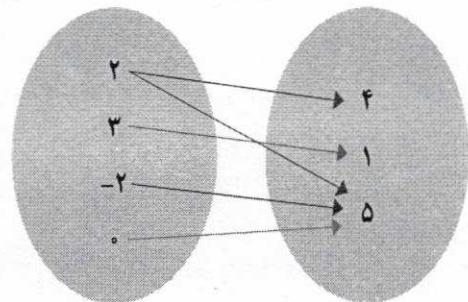
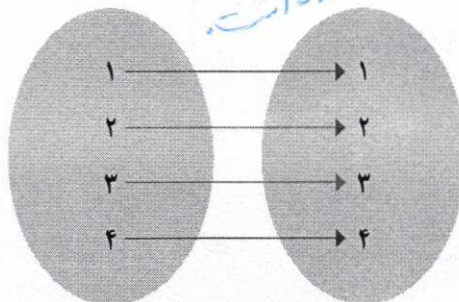
۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع اند؟ چرا؟



تابع است. زیرا به هر فرد یک نمره نسبت داده شده.

تابع نیست. زیرا

بعضی از اعداد اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.



تابع است. زیرا

تابع نیست. زیرا

بعضی از اعداد اول دو عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است. به هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک عضو از مجموعه دوم نسبت داده شده است.

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$ تابع است.

ب) $G = \{(4, 1), (2, -1), (1, -1), (4, 2)\}$ تابع نیست.

پ) $H = \{(2, 3)\}$ تابع است.

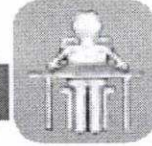
ت) $I = \{(3, 3)\}$ تابع است.

ث) $J = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 4)\}$ تابع نیست.

تهیه کننده:

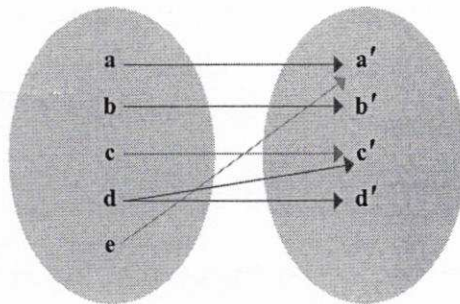
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین



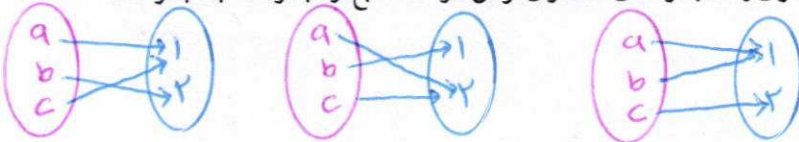
۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

نکته: اگر c حذف شود
به هیچ عضوی وصل نمی شود
و باز هم خود را یک تابع خواهد بود



یا باید a' حذف شود
تا نمودار پیکانی
نمودار یک تابع شود

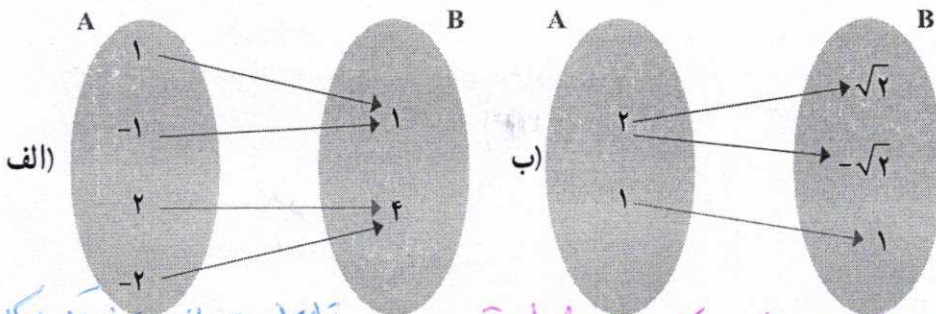
۲. اگر A مجموعه ای ۳ عضوی و B مجموعه ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.



۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



$$f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$$

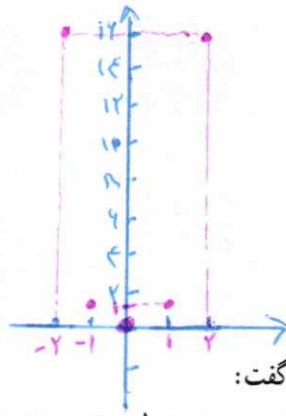
تابع نیست زیرا

دو زوج مرتب متمایز دارای مولفه اول برابر هستند.

ت) رابطه ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع است زیرا هر شخص یک شماره ملی

تفصیلات داده می شود

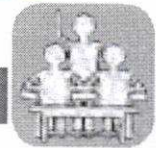


با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می توان گفت:

* اگر رابطه بین x و y را $(x \text{ متغیر مستقل})$ به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.

* اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

* اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.



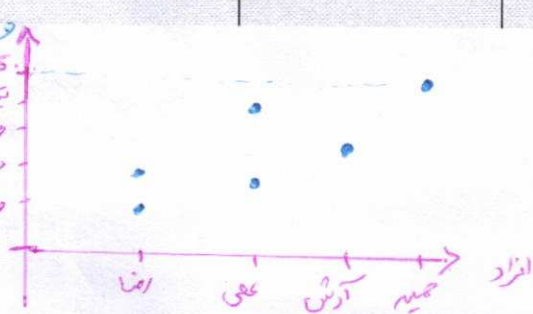
کار در کلاس

در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش های رابطه ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

جدولی	توصیفی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی	نمایش پیکانی
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A یک واحد بیشتر از آن را نسبت می دهد.	$f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 4 \\ 4 & \rightarrow & 5 \\ 5 & \rightarrow & 6 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A توان دوم آن را نسبت می دهد.	$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 9 \\ 4 & \rightarrow & 16 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ توان چهارم آن را نسبت می دهد.	$f = \{(-2, 16), (-1, 1), (1, 1), (2, 16)\}$	نمودار مالانصفیح	$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ -2 & \rightarrow & 16 \\ -1 & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 16 \end{array}$
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline رضا & 50 \\ امیر & 40 \\ حمید & 70 \\ قاسم & 60 \end{array}$	f رابطه ای است که به هر فرد مجموعه ورزش مورد علاقه را نسبت می دهد.	$f = \{(\text{رضا}, \text{فوتبال}), (\text{امیر}, \text{تنیس}), (\text{حمید}, \text{والیبال}), (\text{قاسم}, \text{کشتی})\}$		$\begin{array}{ccc} A & f & B \\ \text{رضا} & \rightarrow & \text{فوتبال} \\ \text{امیر} & \rightarrow & \text{تنیس} \\ \text{حمید} & \rightarrow & \text{والیبال} \\ \text{قاسم} & \rightarrow & \text{کشتی} \end{array}$

در زیر
کشتی
تیراندازی
والیبال
تنیس

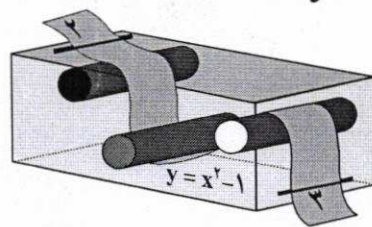
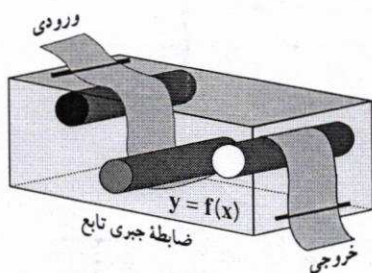
x	y
رضا	فوتبال
امیر	تنیس
حمید	والیبال
قاسم	کشتی



درس ۲

ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به طور مثال تابع

$$f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \right\}$$

در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول

مؤلفه دوم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$

در این صورت $y = x + 3$. معادله $y = x + 3$ را ضابطه

تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم

و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f

روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y

(متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$

متغیر مستقل

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های

اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم.

دامنه تابع f را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

متغیر وابسته

یک تابع مانند f از مجموعه A به مجموعه B ، قانون
با ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو
از مجموعه B را نسبت دهد.

۱. Domain

۲. Range

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵) الف

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2} \Rightarrow x=2$$

$$x+y=4 \Rightarrow y=4-x \Rightarrow y=2$$

$$x^2+y^2=(2)^2+(2)^2=4+4=8$$

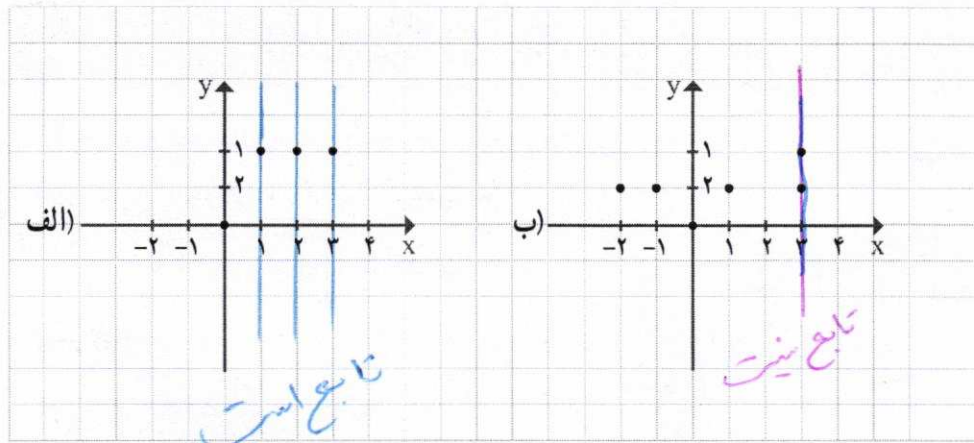
۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل x^2+y^2 را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$(2, x+y) = (2, 4) \Rightarrow x+y=4$$

$$(5, 2) = (5, x-y) \Rightarrow x-y=2$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می کند؟



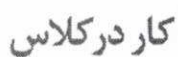
خواندنی

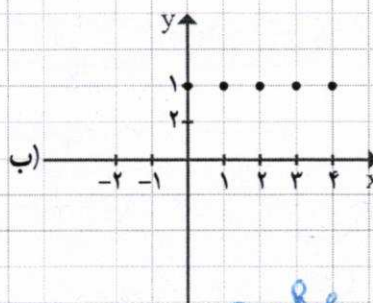
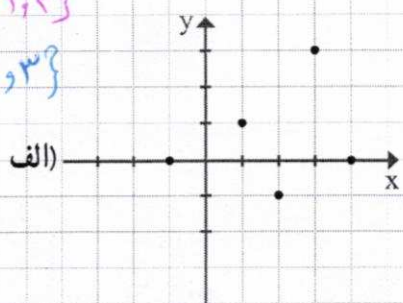
توابع در شاخه های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم گیری های اقتصادی استفاده می شود و یا در فیزیک،

هنگامی که می خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً

هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می شود.

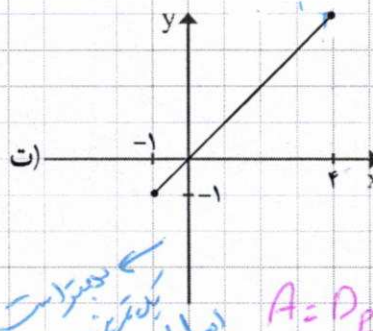
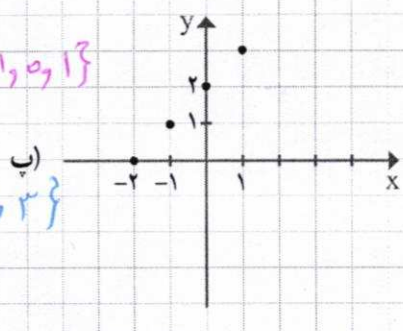
توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می شوند و کاری را بر روی ورودی های خود انجام می دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تأثیرات الگوریتم می بینیم.


$$D_F = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

$$R_F = \{0, -1, 1, 2\}$$


$$R_R = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \mathbb{R}^1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$



$$A = D_\beta = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

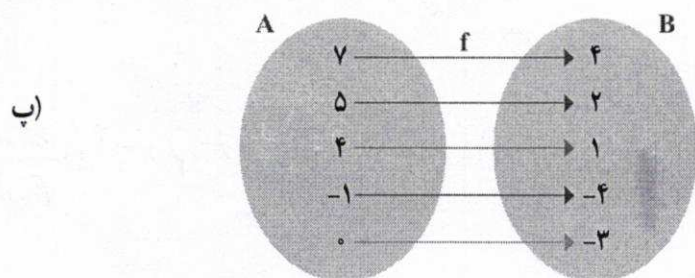
۲. دامنه و برد هریک از تابع های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \rightarrow B$

$$R = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$f(x) = x + 4 \quad A = \{2, -1, 0, 1, \dots\}$$

ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^2 + 1$, $A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$

x	$f(x) = 2x^2 + 1$
-1	$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 3$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$
2	$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$
1	$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$
0	$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$R_f = \{3, 5, 9, 1, \frac{3}{2}\}$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3$

$f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

$f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$

$f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 1 = 5$

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 - 1$, $A = \{1, -1, 0, 2, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, 2\}$, $B = \{0, -2, -1, 4, 3, 2, \frac{-22}{25}, 7\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$, $B = \{0, -1, 2, 1, \sqrt{3} - 1\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$, $B = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}, -1\}$

ب) $f(0) = \sqrt{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = \sqrt{-1+1} - 1 = 0 - 1 = -1$

$f(8) = \sqrt{8+1} - 1 = 3 - 1 = 2$

$f(2) = \sqrt{2+1} - 1 = \sqrt{3} - 1$

$f(1) = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1$

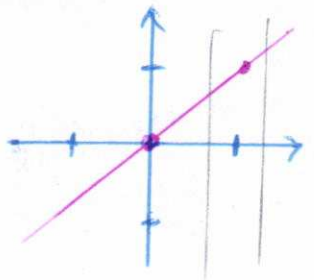
$f(-2) = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

$f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$

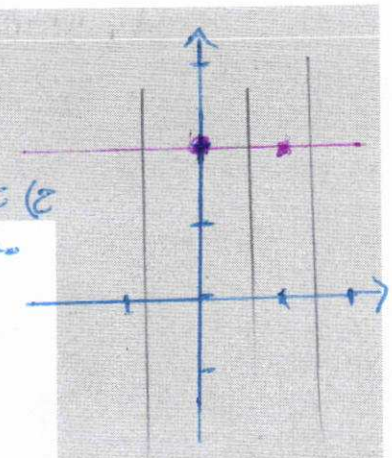
ع) تابع است
 $f(0) = 0$
 $f(1) = 1$



چون هر خط موازی محورین ها نمودار
 واحد اکثر در یک نقطه
 قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

ع) تابع است محور
 محورین نمودار را حداقل در یک نقطه قطع می کنند
 ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2$

$f(0) = 2, f(1) = 2$



۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1, A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$
 $B = \{1, 3, 7\}$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
 $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
 $f(1) = (1)^2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
 $f(2) = (2)^2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$
 $f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}, A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2\}$
 $B = \{3, 2, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}, A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$
 $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, 3\}$

$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$
 $f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
 $f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$
 $f(3) = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
 $f(4) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
 $f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x, A = W = \{0, 1, 2, \dots\}$
 $B = W = \{0, 1, 2, \dots\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 1$
 $f(2) = 2$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0, A = \mathbb{R}$
 $B = \{0\}$

$f(0) = 0$
 $f(1) = 0$
 $f(-100) = 0$
 $f(\infty) = 0$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟
 حاصل $f(3)$ را بیابید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x-4)^3$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$

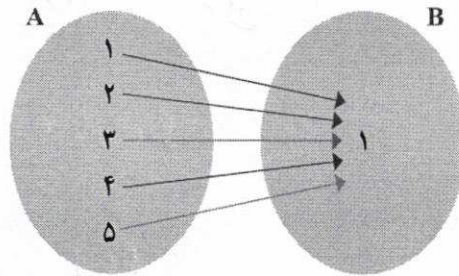
✓ پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^3 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2\sqrt{x-4}$

$f(3) = 2(3)^3 - 4 = 2(27) - 4 = 54 - 4 = 50$

۴. $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1} = 3$
 $f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
 $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$
 $f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$
 $f(-2) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ن)



$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

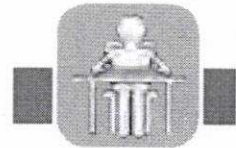
$$= \{1\}$$

ث) $f = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0) \right\}$

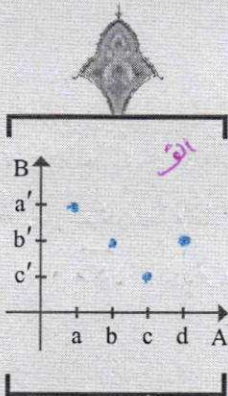
$$\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\}$$

$$\{1, 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 0\}$$

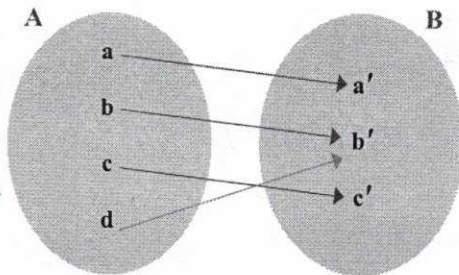
تمرین



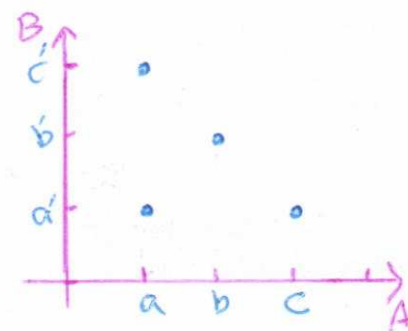
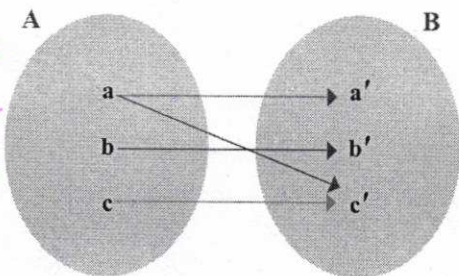
۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف) تابع است
چون هر عضو از A یک یکتا خارج شده است.

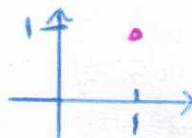


ب) تابع نیست
چون از یک عضو مجموعه A دو یکتا خارج شده است.



پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ث) $g = \{(1, 1)\}$

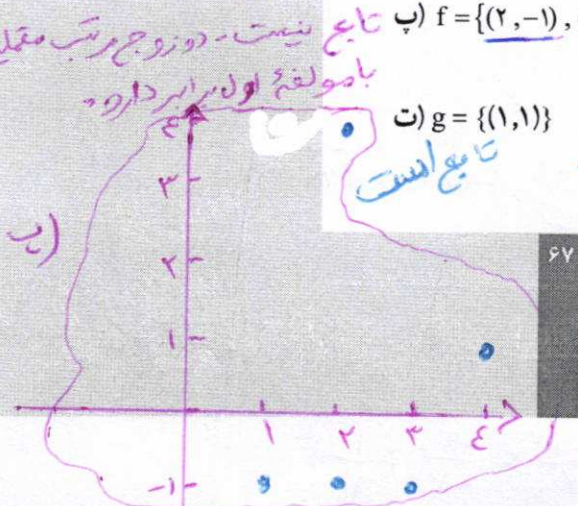
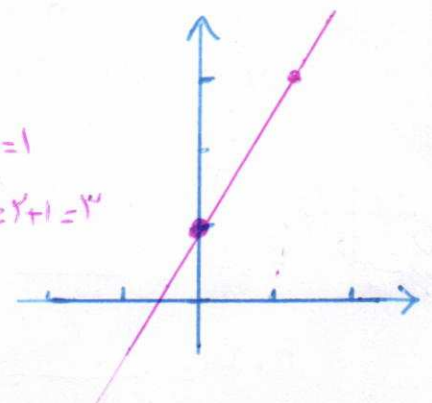


ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

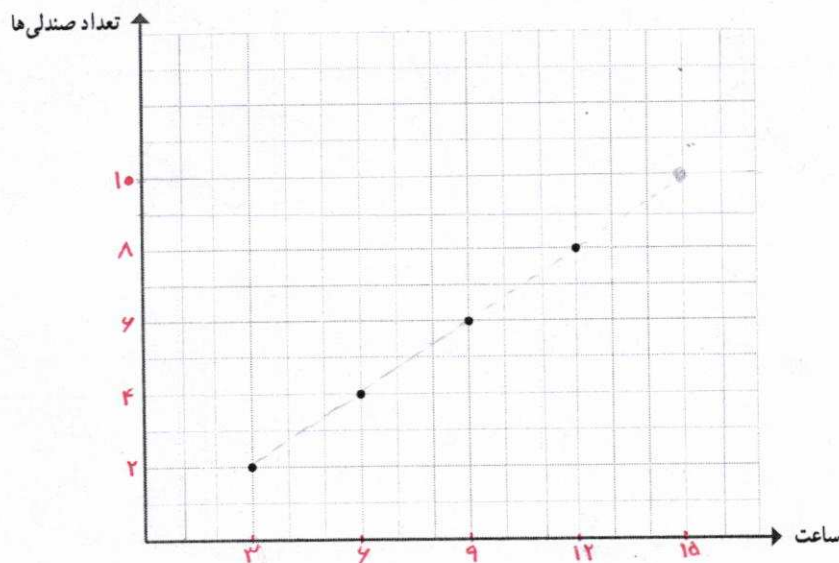
$f(1) = 2(1) + 1 = 3$



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟ **۱۰ آ**



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟ **بله**
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟ **خیر**

سوره ی فعالیت

فعالیت ۱

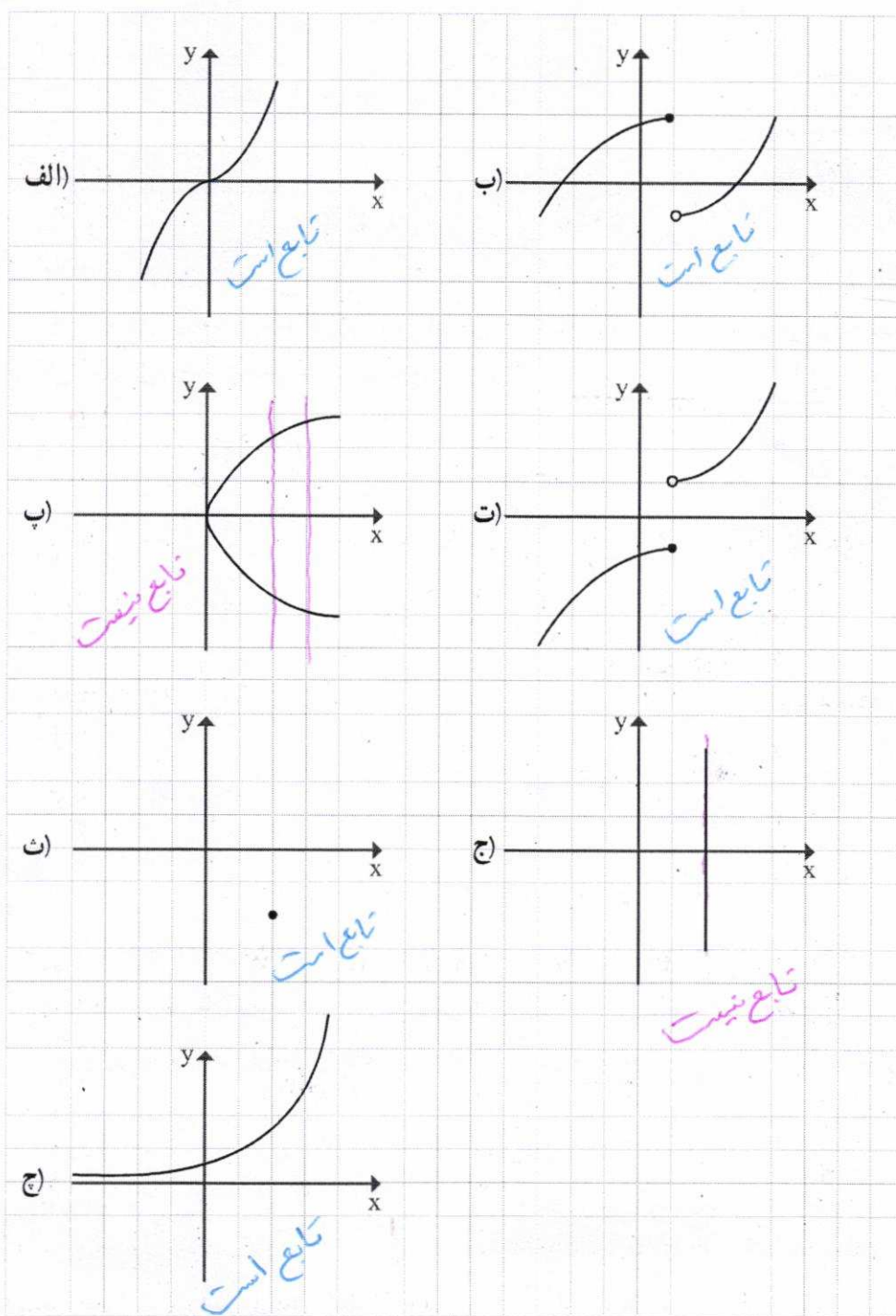


الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می باشد؟ چرا؟



تهیه کننده:

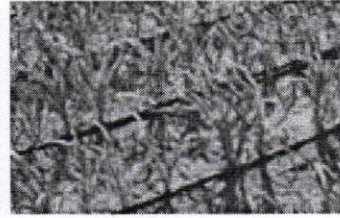
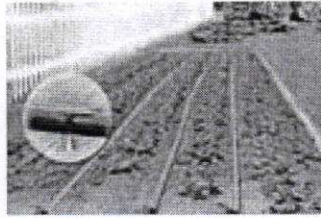
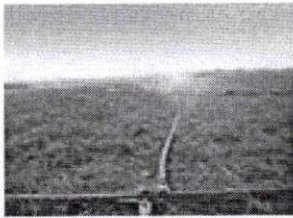
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شماره‌ی فعالیت

فعالیت ۲

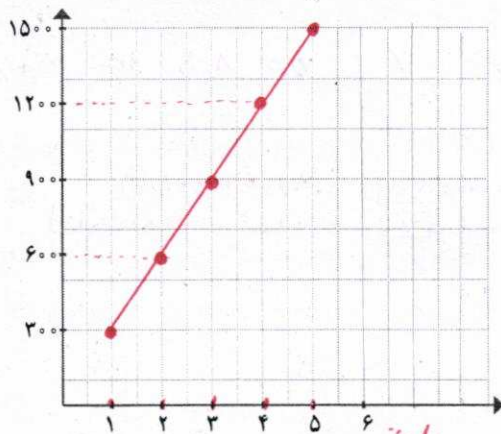


یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) بر حسب متر	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰

اگر متر از لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

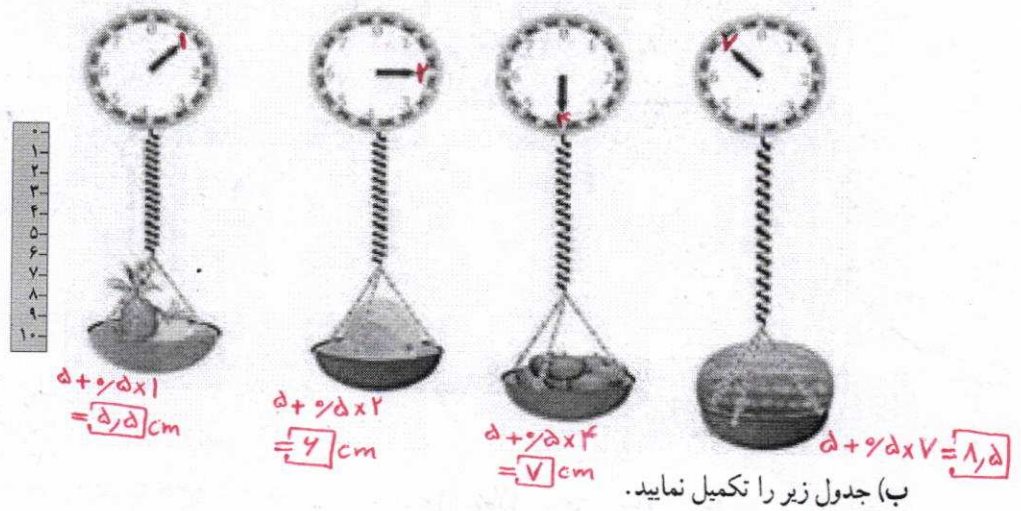
می‌خواهیم به‌عنوان تابع خطی رسم کنیم.

هر تابع به صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$ ، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در فعالیت ۱ و ۲ هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب یا استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آبی‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیر کشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.

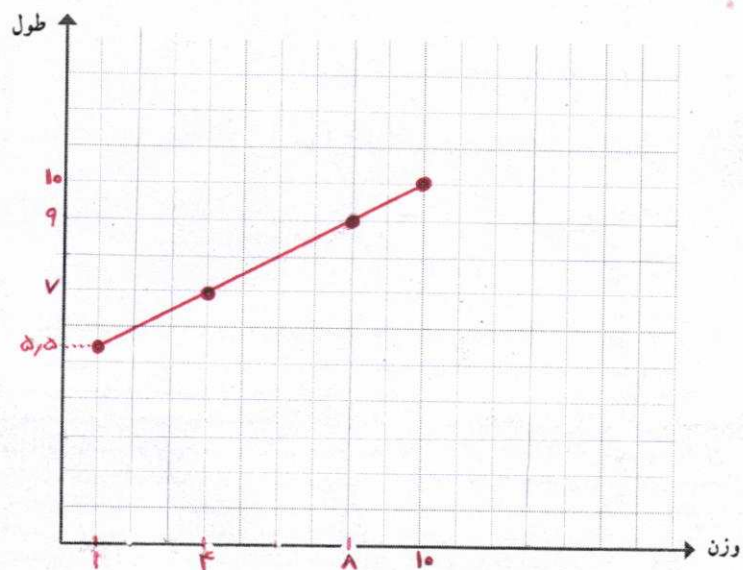


اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتیمتر)	Δ, Δ	7	$7, \Delta$	$1, \Delta$	15	$\Delta + \gamma \Delta a$

استفاده از فرمول $f(x) = \gamma$

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(10)$, $f(8)$, $f(4)$, $f(1)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بر حسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$$440 = 55x - 35$$

$$55x = 475$$

$$x \approx 8,64$$

شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	معادله خط یا ضابطه تابع: $y=f(x)=mx+h$	$f(1)$	$f(2)$
$m = \frac{185 - 75}{2 - 1} = 110$	$(2, 75) \rightarrow 75 = 110 \times 2 + h$ $h = 75 - 220 = -145$ $y = 110x - 145$	20	75

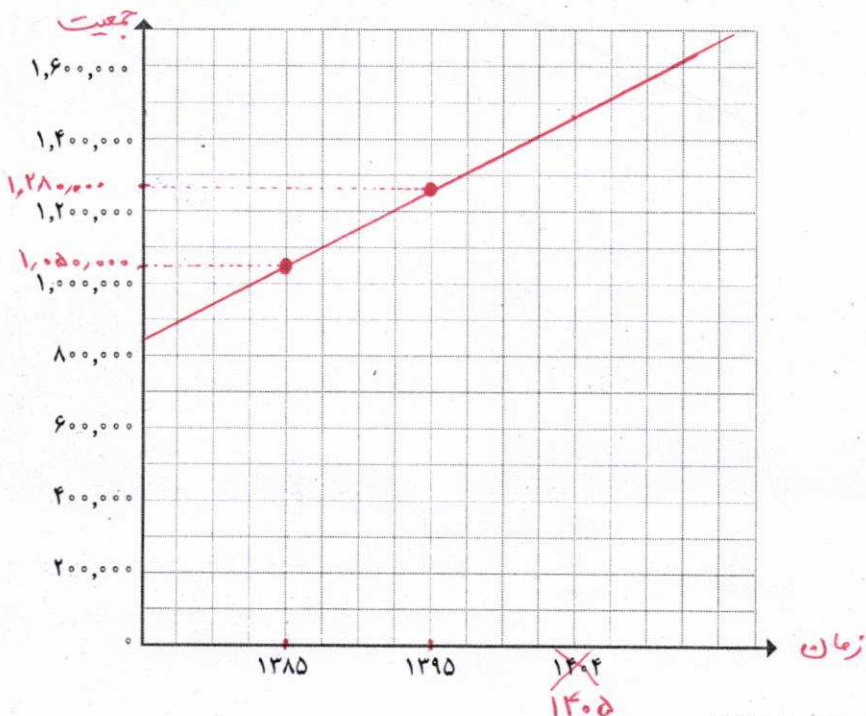
$$x=2 \Rightarrow y = 110 \times 2 - 145 = 75$$

$$x=1 \Rightarrow y = 110 \times 1 - 145 = -35$$

کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پانجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.



نرخ رشد:
به میزان افزایش
یک کمیت
(نظیر جمعیت)
در واحد زمان
نرخ رشد گفته می‌شود.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y = mx + h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

کار در کلاس



در یک تابع خطی $f(0) = 2$ و $f(2) = 3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

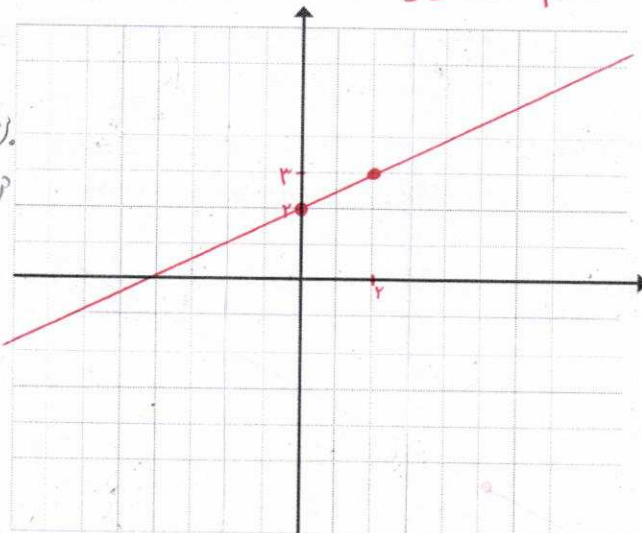
$$m = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y = mx + h$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{2} \times 0 + h \Rightarrow h = 2$$

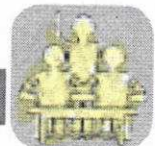
$$y = mx + h \Rightarrow \text{معادله خط: } y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\text{بنابراین } y \text{ یا } f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



برای رسم از شرط داده شده در مسئله استفاده کردیم ✓

کار در کلاس



جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$m = \frac{7-0}{2-0} = \frac{7}{2} ; 0 = \frac{7}{2}x + b \Rightarrow b = 0$$

جواب (۵)

$$f(x) = \frac{7}{2}x + 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x$$

$$* f(0/1) = \frac{7}{2} \times 1 = 3.5$$

$$** f(-1) = \frac{7}{2} \times (-1) = -3.5$$

$$** f(-1) = \frac{7}{2} \times (-1) = -3.5 \Rightarrow 3.5 - (-3.5) = 7$$

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $A(0, 5)$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

۶. رابطه بین درجه دما بر حسب سانتی گراد و فارانهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

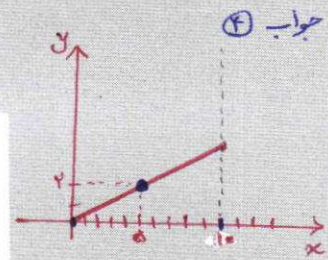
۷. یک شرکت برای تولید x کالا $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری - چابهار



جواب (۶)

$$F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32 = 72$$

$$F = 72$$

جواب (۷) الف)

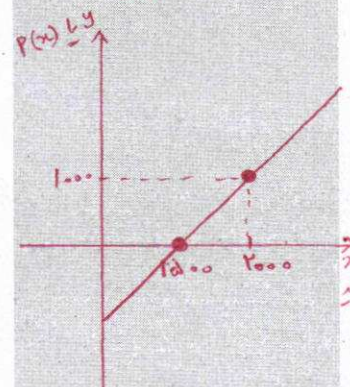
$$R(x) = 70x$$

$$p(x) = R(x) - C(x)$$

$$p(x) = 70x - (3000 + 50x)$$

$$p(x) = 20x - 3000$$

x	1500	2000
y	0	1000



ب)

$$p(x) = 0$$

$$20x - 3000 = 0$$

$$\frac{20x}{20} = \frac{3000}{20} \Rightarrow x = 150$$

لازم باید ۱۵۰۰ شیء بفروشد

کالا بفروشد تا سوددهی آغاز شود.

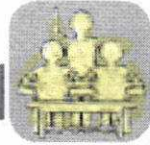
$$x = y + 4$$

$$P = 2(x + y) = 2(y + 4 + y) \Rightarrow P = 2(2y + 4)$$

$$\Rightarrow P = 4y + 8$$

محیط تابع خطی است چون به شکل $y = mx + h$ درآمده است.

کار در کلاس



ضابطه تابع محیط مستطیل هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

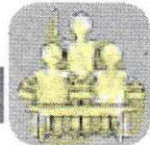
آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟ خیر

$$S = x \times y = (y + 4) \times y$$

$$S = y^2 + 4y$$

مساحت یک تابع خطی نیست؛ چون به شکل $y = mx + h$ در نیامده است (متغیر با توان ۲ دارد)

کار در کلاس

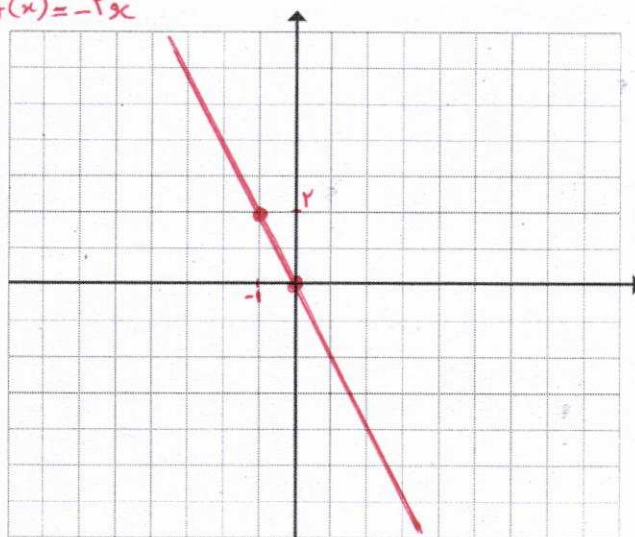


اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1) = 2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$m = \frac{2 - 0}{-1 - 0} = -2$$

$$0 = -2 \times 0 + h \Rightarrow h = 0$$

معادله ضابطه تابع f : $y = f(x) = -2x$



$$m = \frac{f-1}{f-1} = 3$$

$$1 = 3 \times 1 + n \Rightarrow n = 1 - 3$$

$$n = -2$$

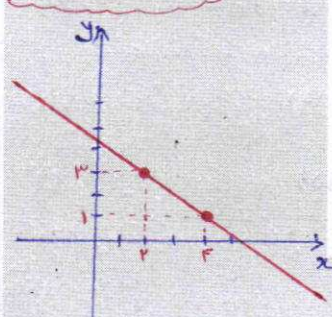
$$f(x) = 3x - 2$$

$$m = \frac{3-1}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$3 = -1 \times 2 + h \Rightarrow h = 3 + 2$$

$$h = 5$$

$$f(x) = -x + 5$$



تمرین



۱) مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(1) = 1$ و $f(2) = 4$.

۲) ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(4, 1)$ می گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳) در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

$$m = \frac{8-5}{2-1} = 3$$

$$5 = 3 \times 1 + h \Rightarrow h = 5 - 3 \Rightarrow h = 2$$

معادله خط: $y = f(x) = 3x + 2$

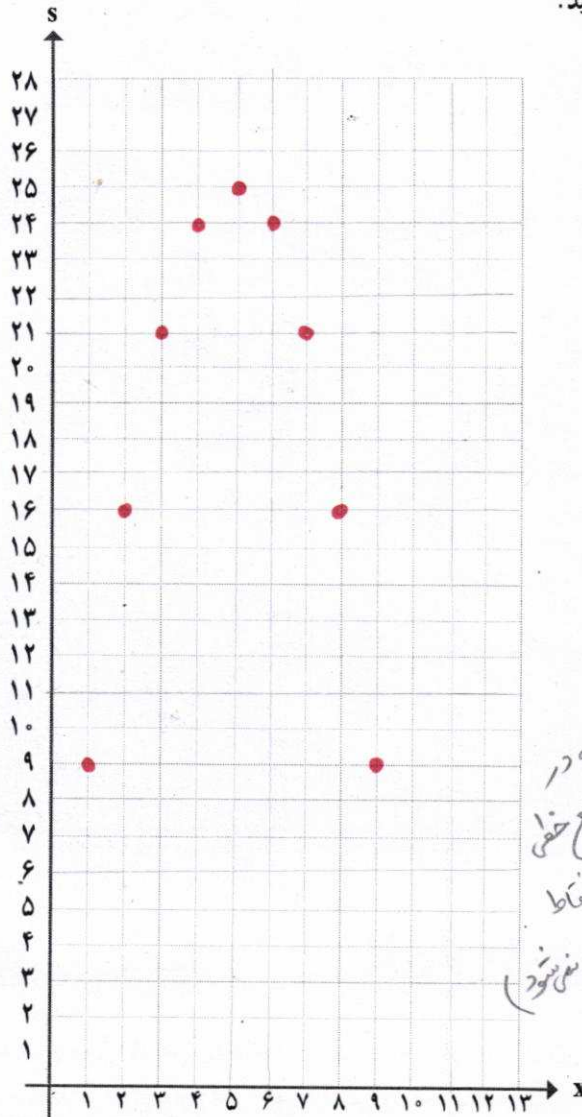
$$f(-3) = 3(-3) + 2 = -9 + 2 = -7$$

$$f(5) = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17$$

تهیه کننده:

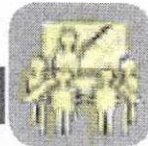
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



با دقت در نقاط مشخص شده در دستگاه، می بینیم که تابع خطی نیست (با وصل کردن نقاط به هم، خط راست ایجاد نمی شود).

فعالیت



یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $1200 - x$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

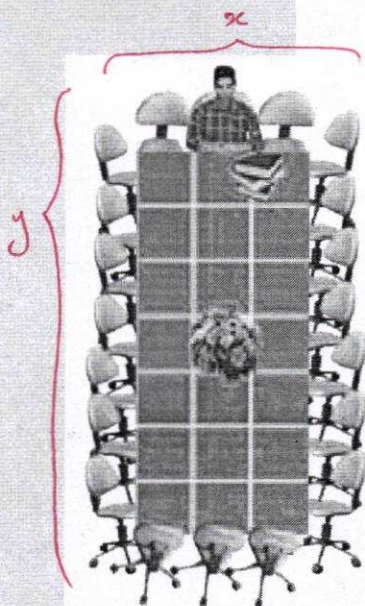
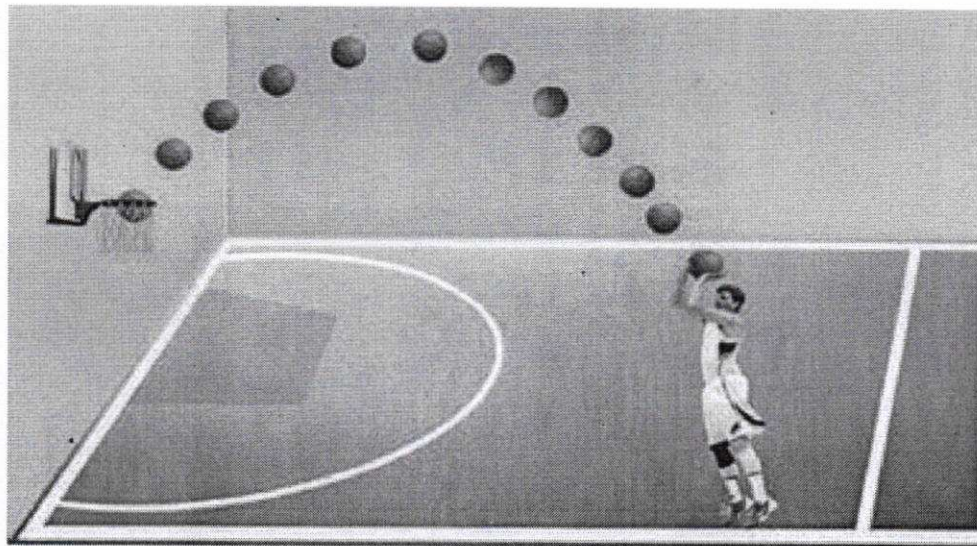
مثالی که در کتاب می بینیم: $R(x) = (1200 - x) \times x$ (درآمد)

نیازی به ضرب کردن نیست چون درست (پ) شده است.

$$C(x) = 30000 + 200x$$

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲



فعالیت



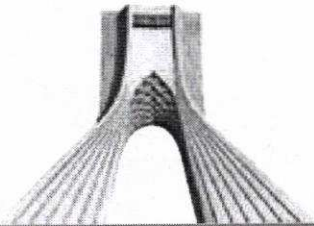
$$\frac{x(x+y)}{2} = 10$$

$$x+y=10$$

برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع هایی 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می دهیم. الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
s	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹
(x,s)	(۱,۹)	(۲,۱۶)	(۳,۲۱)	(۴,۲۴)	(۵,۲۵)	(۶,۲۴)	(۷,۲۱)	(۸,۱۶)	(۹,۹)

با توجه به محیط باید جمع طول و عرض عدد باشد



رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت $\cup$ یا $\cap$ است که به آن سهمی می گوئیم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض ها رسم می شود، محور تقارن سهمی است. *محور تقارن منحنی حل شود*

- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cup$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

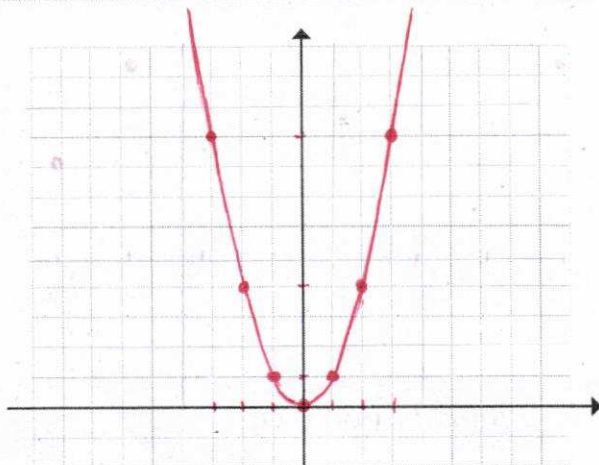
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cap$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید. *درجه دوم سهمی*

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...



تهیه کننده:

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر متر مربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ (متر کار در یک روز)

$x=200 \Rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 200 = 1000$ تومان
 $x=300 \Rightarrow \text{قیمت} = 1200 - 300 = 900$ تومان

و $x=300$ چقدر است؟

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟
 $x=200 \Rightarrow \text{هزینه} C(200) = 30000 + 200 \times 200 = 70000$
 $x=300 \Rightarrow \text{هزینه} C(300) = 30000 + 200 \times 300 = 90000$

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(300)$ را محاسبه کنید.

$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = -10400$

$P(100) = 100 \times (1200 - 100) - (30000 + 200 \times 100) = 40000$

$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (30000 + 200 \times 200) = 130000$

$P(300) = 300 \times (1200 - 300) - (30000 + 200 \times 300) = 180000$

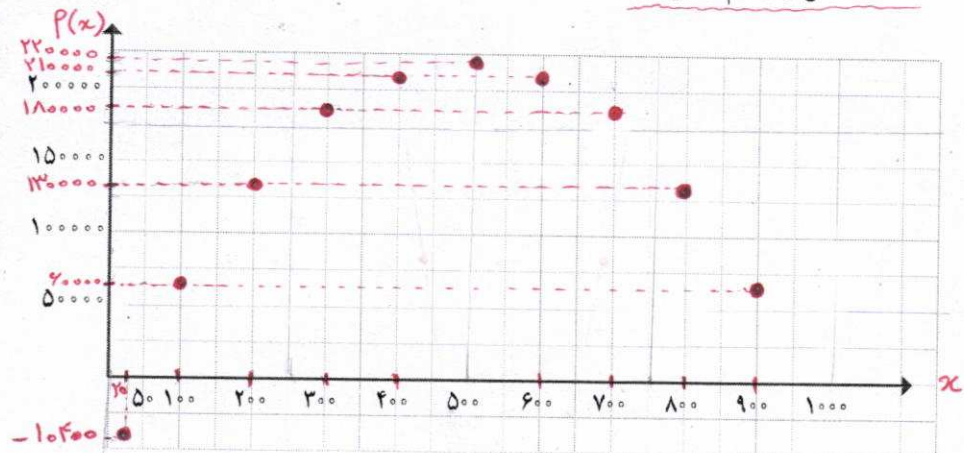
ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید: $P(x) = 1000x - x^2 - 30000$

ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	200	100	200	300	400	500	600	700	800	900
P(x)	-10400	40000	130000	180000	210000	220000	210000	180000	130000	40000

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

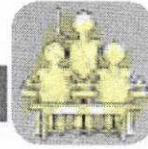


چ) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه مترافز بیشتری رنگ آمیزی شود،

گروه سود بیشتری کسب می کند؟ چون $P(x)$ منفی شده (یعنی شرکت ضرر داشته است)

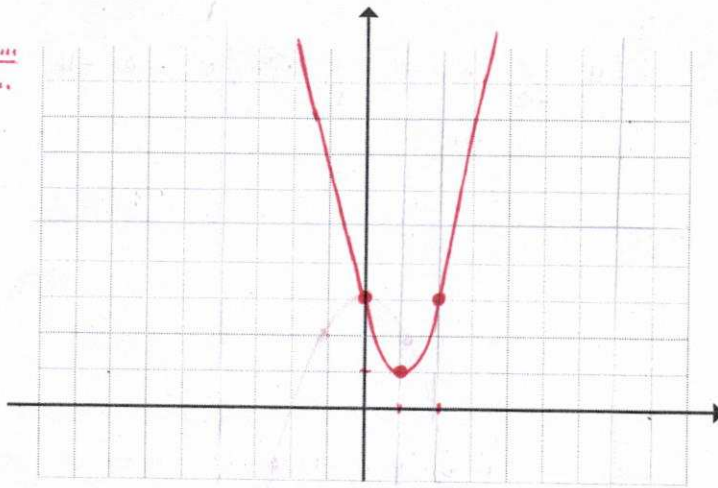
خیر - از $x=500$ به بعد سود کمتر می شود.

کار در کلاس



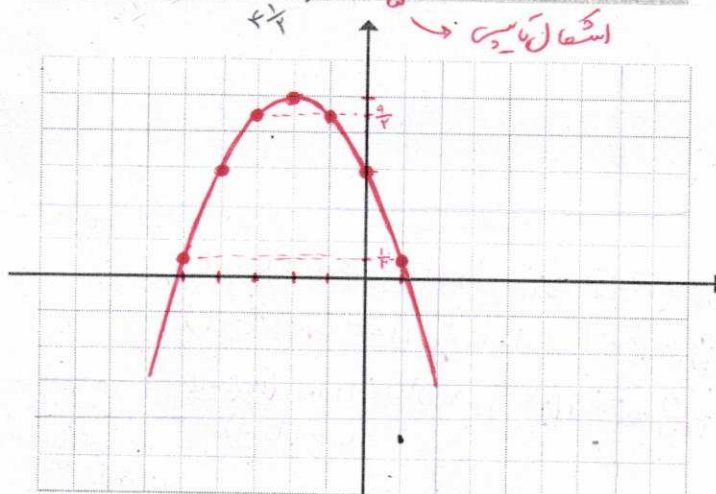
به کمک صفت (ت) کار در کلاس صفه قبل
الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.
لحنش کمی شیرین دارد
رأس سهمی (۱، ۱) داریم

x	...	0	1	2	...
y	...	3	1	3	...



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 5$ را رسم کنید.
رأس سهمی (-۲، ۵)

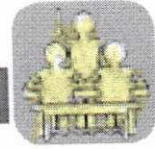
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{9}{4}$	5	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{1}{4}$	...



تهیه کننده:

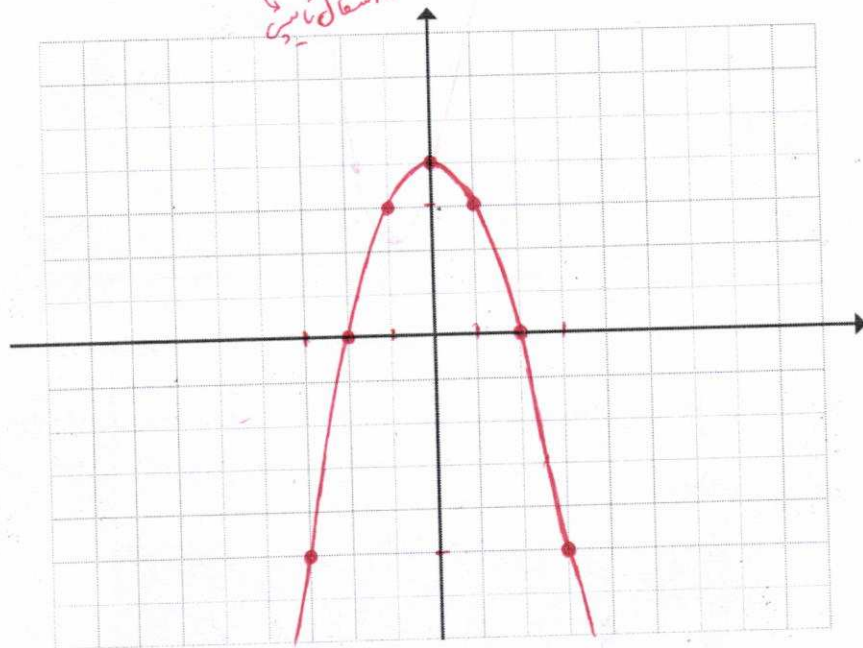
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

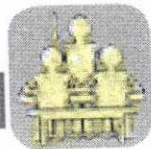


جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	...



کار در کلاس



نقاط رأس سهمی هایی را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ (رأس (0, 0))

الف) $y = x^2$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-1)} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 - 0^2 = 4 \Rightarrow y = 4$ (رأس (0, 4))

ب) $y = 4 - x^2$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = -1 \Rightarrow y = -1$ (رأس (1, -1))

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

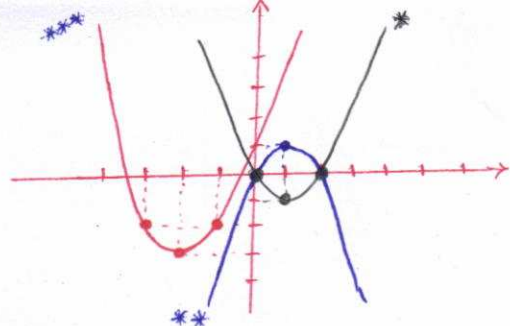
ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

اول ساده کردن: $y = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1$

$y = 2x^2 - 4x + 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1 \Rightarrow y = 1$ (رأس (1, 1))

نویسنده: عرض رأس، همان عدد بعد از پرانتز در لای توان ۲ است. طول رأس، همان عدد در پرانتز در لای توان ۲ است.



*** $y = x^2 + 4x + 1$

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	-2	-3	-2	...

*** $y = -(x-1)^2 + 1$

x	...	0	1	2	...
y	...	0	1	0	...

حل ۱ $y = x^2 - 2x$

x	...	0	1	2	...
y	...	0	-1	0	...

تمرین



۱. نمودار سهمی‌های $y = x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 - 2x$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود. بازای $x = 7.5$
۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پژوهشی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
 $P(x) = R(x) - c(x) = 200x - (x^2 + 40x + 100)$
 $P(x) = -x^2 + 160x - 100$

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-160}{2(-1)} = 80$

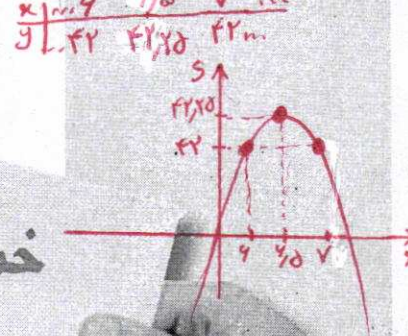
پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟ $x = 80$ را در تابع سود جایگزین می‌کنیم.
 $P(80) = -80^2 + 160(80) - 100 = 6390$

بیشترین سود روزانه کارگاه 6390 است.

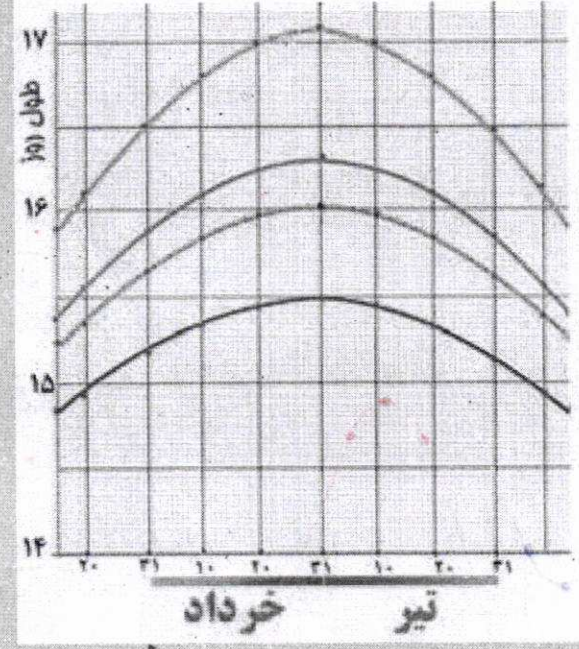
حل ۲ $P(x) = R(x) - c(x)$
 $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - (18x + 40)$
 $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 40$

درجه ۲ سهمی - ماکسیم در رأس اتفاق می‌افتد
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(12)}{2(-\frac{1}{4})} = 24$
 $x = 24$ ماکسیم
 $P(24) = -\frac{1}{4}(24)^2 + 12(24) - 40 = 32$
 ماکسیم مقدار سود

حل ۳ $P = x(x+y) = 24$
 $x+y = 13 \Rightarrow y = 13-x$
 درجه ۲ سهمی $S = x \cdot y = x(13-x)$
 $S = 13x - x^2$



خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



حل ۴ $2x + a = 100 \Rightarrow a = 100 - 2x$

درجه ۲ سهمی $y = xa = x(100 - 2x) \Rightarrow y = 100x - 2x^2$

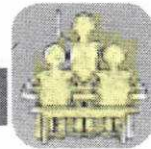
طول را ماکسیم کنیم $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$
 $a = 100 - 2(25) \Rightarrow a = 50$

$y_{max} = x \cdot a = 25 \times 50 = 1250$

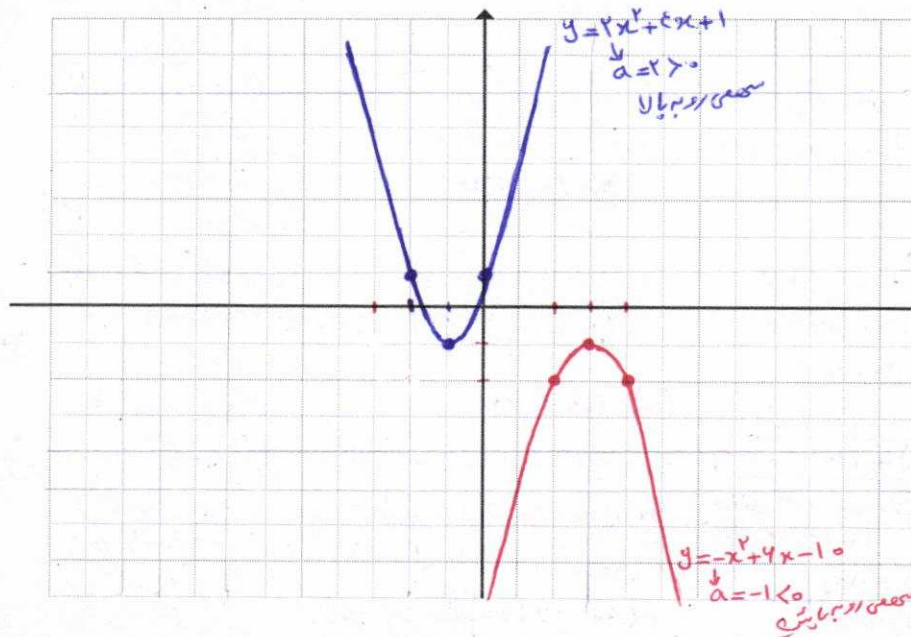
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x - 10$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

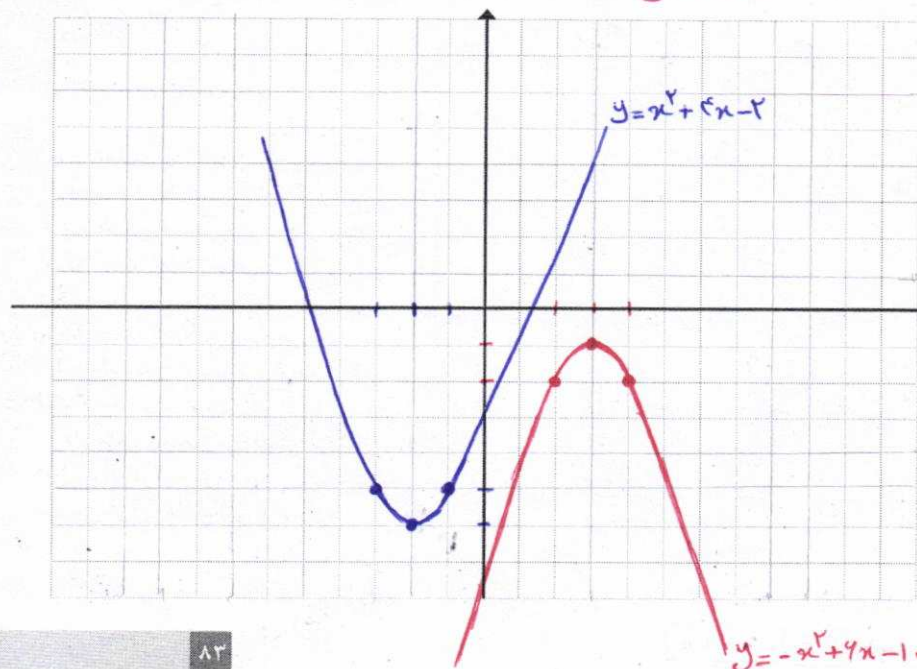
$$y = 2x^2 + 4x + 1$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$$

طول رأس

x	...	-2	-1	0	...
y	...	1	-1	1	...

۲. نمودار توابع $y = x^2 + 4x - 2$ و $y = -x^2 + 4x - 10$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید. معادله تساوی ندارند.



$$y = -x^2 + 4x - 10$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

طول رأس

x	...	2	3	4	...
y	...	-2	-1	-2	...

$$y = x^2 + 4x - 2$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2$$

طول رأس

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	-5	-6	-5	...

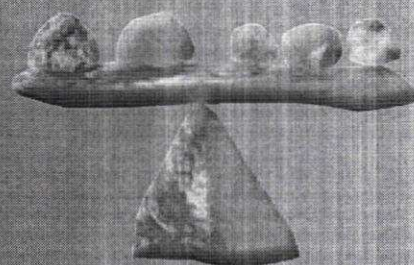
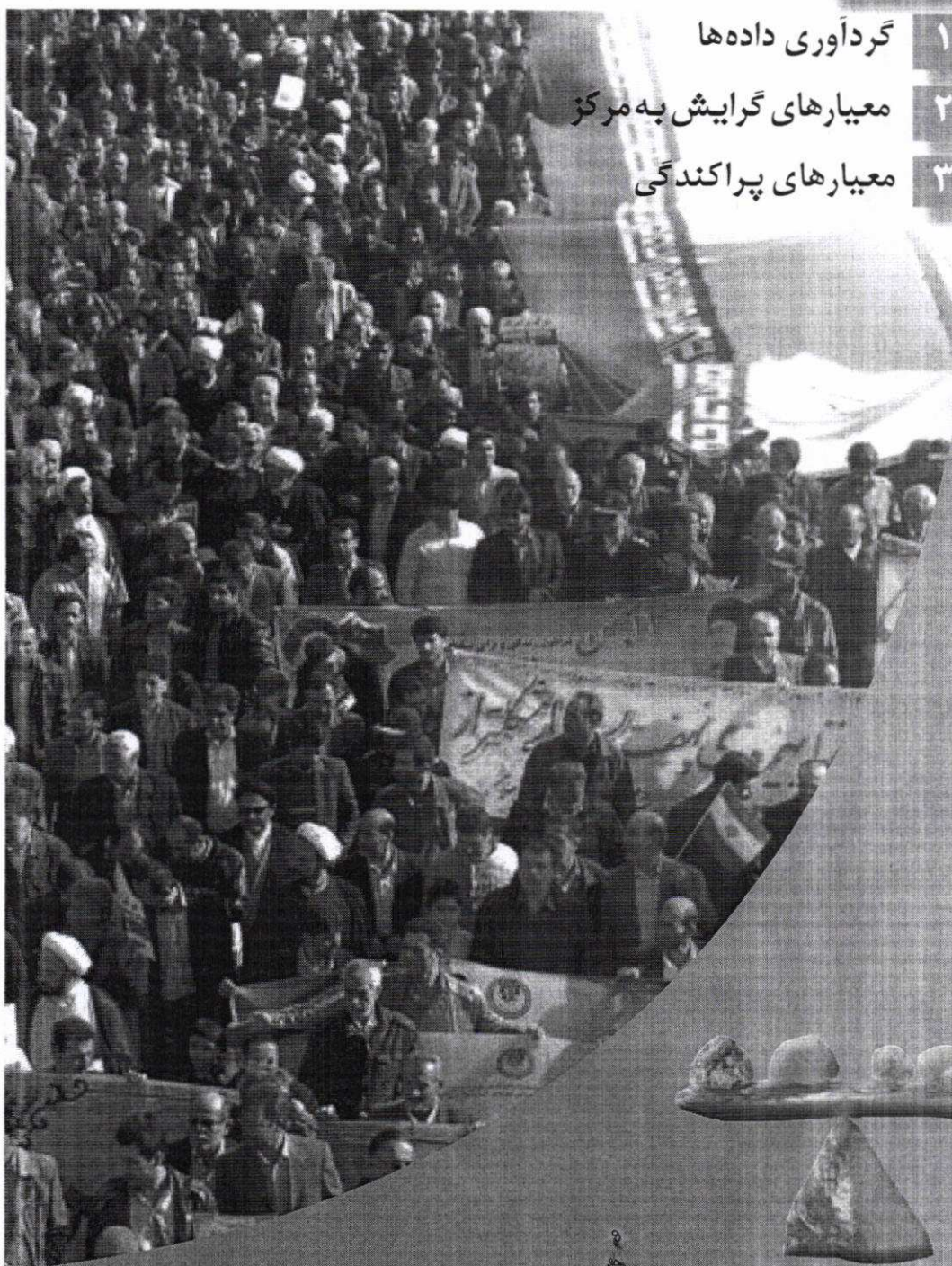
کار با داده‌های آماری

فصل چهارم

درس ۱ گردآوری داده‌ها

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز

درس ۳ معیارهای پراکندگی



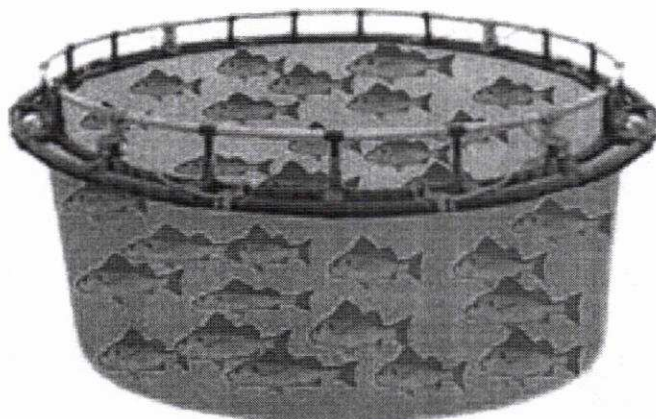
درس ۱

گردآوری داده‌ها

فعالیت



می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. ابتدا از قسمت عمیق و در مرحله بعد، از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق



انتخاب ۵ ماهی از قسمت کم عمق



۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌های حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟ **خیر**

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

تخمین از قسمت عمیق بیشتر - از قسمت کم عمق کمتر
از مقدار واقعی است.

از قفسه ها مختلف
مناسب کتابت

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، چگونه آنها را انتخاب می کردید تا منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی های حوضچه می شد؟ فرض کنید ماهی ها، همانند شکل در حوضچه پخش شده اند و تحرک زیادی ندارند.

۴. اگر از نحوه پخش شدن ماهی ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (مثلاً زمانی که آن را شطرنجی کرده ایم) به ما کمک می کند ماهی های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی ها باشند؟ **انتخاب تصادفی مناسب کتابت.**

داده ها واقعیت هایی درباره یک چیزاند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه ریزی به کار می روند. واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می گویند که داده های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می شود. مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می نامند. هر زیرمجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک نمونه می نامند. نمونه ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند نمونه تصادفی می نامند.

در مثال حوضچه ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی های حوضچه که عبارت است از مجموعه همه واحدهای آماری جامعه گفته می شود. اگر وزن تک تک ماهی ها را در اختیار داشته باشیم داده های جامعه را داریم. وزن نمونه ۵ ماهی از قسمت کم عمق معرف داده های یک نمونه پنج تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونه تصادفی ۵ تایی از حوضچه در اختیار داریم.

خواندنی

تفاوت زیادی بین عدد در ریاضی و داده در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد ۵۰ یک مفهوم در ریاضی دارد و داده ای که مقدار آن ۵۰ است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به عنوان مثال این داده می تواند متوسط تلفات روزانه جاده های کشور در یکی از سال های اخیر باشد.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

از قدیم گفته اند که
مشت نمونه خروار است،
ولی نه هر مشت. چرا؟
اگر نمونه تصادفی
انتخاب شود
آنگاه نمونه
معرف جامعه
خواهد بود.

فعالیت



می‌خواهیم طول قد دانش آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟
اندازه‌گیری قد نامی دانش آموزان مدرسه

آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن
آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می‌توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.
مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده‌ها

تعداد دانش آموزان	جوب‌خط برای شمارش	اندازه طول قد
		کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر
		۱۴۰-۱۴۹ سانتی‌متر
		۱۵۰-۱۵۹ سانتی‌متر
		۱۶۰-۱۶۹ سانتی‌متر
		۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر

چگونه مطمئن می‌شوید که دانش‌آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می‌کنید؟

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه‌حل ساده‌تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم‌ترین روش‌های آمارگیری، استفاده از پرسش‌نامه است. پرسش‌نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت‌نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده‌اید. پرسش‌نامه را می‌توانند واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل کنند.



مثالی از پرسش‌نامه طراحی شده

سلام، می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
طول قد شما چقدر است؟

- ☐ کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر
- ☐ ۱۴۰-۱۴۹ سانتی‌متر
- ☐ ۱۵۰-۱۵۹ سانتی‌متر
- ☐ ۱۶۰-۱۶۹ سانتی‌متر
- ☐ ۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر

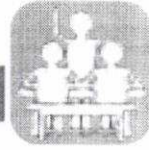
خواندنی

برای به انجام رساندن یک آمارگیری
باید پاسخ سؤال‌های زیر را بدانید:

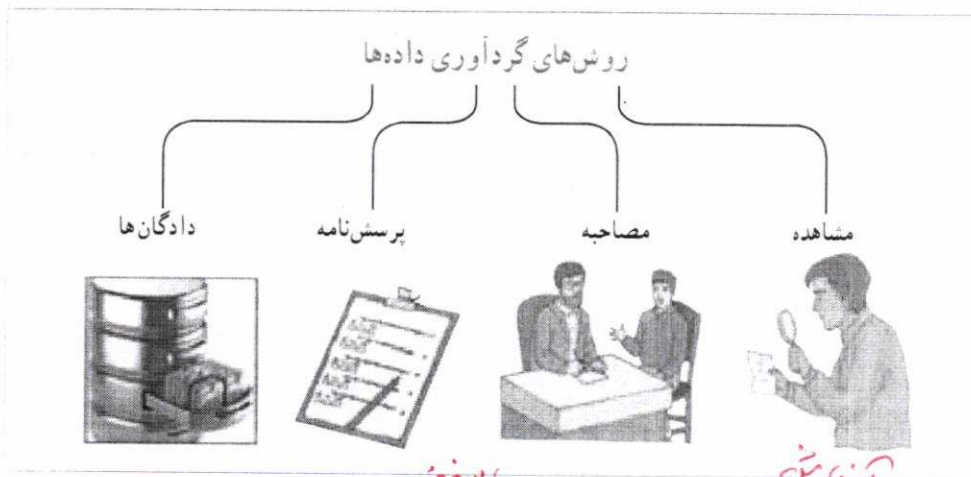
۱. می‌خواهید چه چیزی پیدا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده‌هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده‌ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۵. داده‌های شما باید چقدر دقت داشته باشند؟ چرا؟
۶. داده‌هایتان را چگونه ثبت می‌کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده‌اید؟
۷. داده‌ها را چگونه ارائه می‌کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده‌ها از الگوی خاصی پیروی می‌کنند؟ داده‌ها بیانگر چه هستند؟
۹. چه نتیجه‌گیری یا پیشگویی خاصی می‌توانید از داده‌ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج، با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می‌کنید؟ برای چه کسانی ارائه می‌کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می‌توانید سؤالات دیگری را نیز بررسی کنید، به نظر شما در مرحله گردآوری داده، به کدام یک از سؤالات فوق باید پاسخ داده شود؟

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟ *پرسش از تعدادی از دانش آموزان*
۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری تمامی داده های دانش آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟ *از هر کلاس چند دانش آموز به طور تصادفی انتخاب می کنیم.*



۱. مشاهده: گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخ دهنده، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باغ میوه.



تهیه کننده:

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



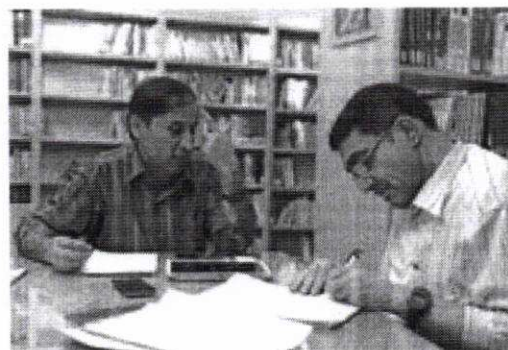
آمار، تصویر دیروز،
آینه امروز، دورنمای فردا

آمار، سنجش گذشته،
شناخت حال،
درک آینده



۲. پرسشنامه: مجموعه سؤالات از پیش

تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یک‌بار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات تمامی خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.



۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت

می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخ‌گو است. مثلاً اگر بخواهیم درباره مسائل فرهنگی کاهش شدآمد (ترافیک) پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب نظران راه‌حل مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن را ندارد.

۴. دادگان‌ها: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از

اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به سرعت رواج یافته است.

تمرین



کدام روش جمع‌آوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها. *پرسشنامه*
۲. سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم. *دادگان*
۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر. *مشاهده*



کار در کلاس



مشاهده

مشاهده

الف) کدام روش برای جمع‌آوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.

۲. ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳. طول قد دانش‌آموزان یک کلاس.

مشاهده

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم.

هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برد؟
نمونه برداری کنیم.



پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

دادگان‌ها: همیشه اطلاعات ثبتی را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.



پرسش‌نامه: نمونه‌گیری مشاهده: اندازه‌گیری
استخراج از وسایل نقلیه
دادگان‌ها: توجه به صاحبان اطلاعات

آمارگیری را می‌توان به روش‌هایی بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ایزاری نظیر گوگل فرم یک پرسش‌نامه طراحی کرد، و آن را به نشانی نمونه انتخابی ارسال کرد و نتایج را از گوگل فرم بازبایی کنیم.

خواندنی



فعالیت

قرار است درباره افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همه افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند: سن، وزن، ملیت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

تهیه کنند:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.
متغیر کمی: متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.
متغیر کیفی: متغیرهایی هستند که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد متغیرهای کمی هستند. متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی‌اند و در مثال کوهنوردان دنا، جنسیت و ملیت را در بر می‌گیرند. به عنوان مثال جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه: یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعه کوهنوردان، معرف یک پارامتر است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردان کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند، چرا؟ **چون جامعه یقیناً یک چیز است.** در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان‌پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آماره نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مسئله: اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کمی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، **سرشماری** از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان‌پذیر نیست). متوسط وزن تمامی هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت مزه هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزه هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا متغیر «مزه» متغیری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم تمام هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، تنها بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های با مزه «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

محدودیت‌های سرشماری عبارت است از:

۱. هزینه زیاد
۲. زمان بر بودن
۳. خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها
۴. امکان استفاده در بررسی‌های مخرب (واحدهای انتخاب شده را از بین می‌برند) ندارد.



کار در کلاس

یک شبکه تلویزیونی می خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می کنند، بداند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می کند.

الف) داده ها و متغیرهایی را که بررسی می شوند، مشخص کنید.

جواب: داده ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که پاسخ آن «تماشا می کند» یا «تماشا نمی کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده ها یک نمونه اند؟ جامعه آماری کدام است؟ **بله - جامعه کوکاکولا شیراز هستند.**

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟ **کمی**

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب: سن، درآمد، **و غیره**

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می گوئیم). **آماره**

مقیاس های اندازه گیری

داده ها را به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می توان متغیرهای داده ها را در چهار مقیاس اندازه گیری دسته بندی کرد. اندازه گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. دو نوزاد دو قلو را نام گذاری می کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه گیری کرده ایم. بسته به دقتی که این اندازه گیری صورت می گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله ای و نسبتی تقسیم می کنیم. هدف بررسی این مقیاس ها بیانگر نوع محاسبه ای است که برای این داده ها مناسب است؛ نظیر: ترتیب، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

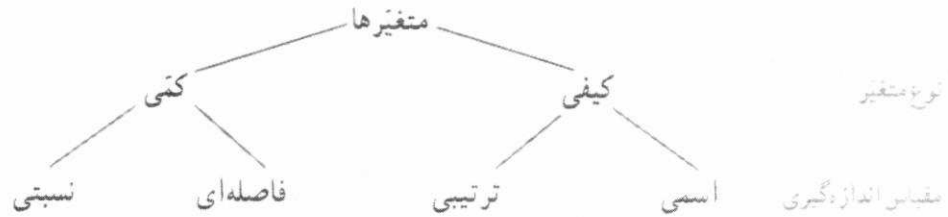
نسبتی: این مقیاس برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده ها، و نسبت مقادیر داده ها نیز بامعنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد دانش آموزان و متغیرهایی که با واژه تعداد شروع می شوند در این مقیاس اندازه گیری می شوند. در این مقیاس صفر به معنی نبود ویژگی در فرد یا شیء است.

فاصله ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه گیری ویژگی افراد یا اشیا به دقت اندازه گیری می شود. به بیان دیگر مقیاس فاصله ای برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین، اختلاف بین مقادیر داده ها بامعناست. مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف برحسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یا دوشیء داده می شود صرفاً بیانگر فاصله بین آنهاست. در نتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای پوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی توان گفت دمای تهران دو برابر پوشهر است ولی اختلاف دما ۱۰ می باشد.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قائل می شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند؛ در عین حال محاسبه اختلاف بین مقادیر داده ها، یا امکان پذیر نیست و یا بی معناست، مانند رتبه دانش آموزان در یک کلاس. اگر رتبه های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۸، ۱۶ کسب کرده باشند رتبه ۳، ۲، ۱ می دهیم و توجه نمی کنیم که اختلاف نمرات آنها چقدر است.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام ها، برجسب ها و گروه ها می شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد. مانند گروه خونی انسان ها و شماره دانش آموزی. کدهای عددی در این مقیاس به واقع عدد نیستند بلکه صرفاً برای گروه بندی به کار می رود.

اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد، به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.



شعارهای برتر
سال جهانی آمار



بهترین برنامه‌ریزی
مستلزم بهترین آمار

با آمار بهتر نفهمیم
بهتر تصمیم بگیریم

کار در کلاس



نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

- الف) محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند. **اسمی (کیفی)**
- ب) در یک دبیرستان ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بالاترین است. **رتبه‌ای (کمی)**
- پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب درجه سلسیوس) **فاصله‌ای (کمی)**
- ت) طول ماهی‌های قزل‌آلا در رودخانه هراز **نسبتی (کمی)**

تمرین



داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هر یک از سؤالات زیر نوع داده‌ها را مشخص کنید.

- الف) نام نماینده حسین ایرانی است. **اسمی (کیفی)**
- ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد. **نسبتی (کمی)**
- پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است. **فاصله‌ای (کمی)**
- ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. **نسبتی (کمی)**
- ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های موردنظر: حمایت کامل، حمایت، بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است. **کیفی (کمی)**
- ج) وضعیت تأهل این نماینده: متأهل **اسمی (کیفی)**
- چ) می‌گویند این نماینده در رأی‌گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن حمایت کرده است. **رتبه‌ای (کمی)**

کیفی (نسبتی)

آمار چیست؟

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک پزشک معمولاً به صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم به بیماری می‌دهد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شبهه‌ای به آن راه ندارد. وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.



فعالیت

به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر، چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.

فصلب
جهت اتخاذ تصمیم روزانه‌ها مختلف است.

■ سلامت

- بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل، افتادن یا زمین خوردن است.
- پنج درصد افراد به واکنش آنفولانزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های مورد نیاز بدن را تأمین می‌کند.

حمل و نقل

- اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.
 - بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کشور خارجی، در پشت چراغ قرمز به ترتیب با بینی خود کلنجار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
 - راندن بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش ۳۰ درصدی شدآمد می‌شود.
 - متوسط تعداد کشته‌های تصادفات حدود ۵۰ نفر در روز اعلام شده است.
- به کمک روشی که در آوردن اطلاعات به کمک نمودار*
- چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند؟ آیا تعریف دقیق کلمات پررنگ شده را حدس می‌زنید؟ جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هریک از مثال‌ها مشخص کنید.

تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هایمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. به علاوه، آمار در شرایطی که با عدم

تهیه کننده:

قطعیت در تصمیم‌گیری روبه‌رویم، هم به یاری ما می‌آید. چگونه به اطلاعات گزارش‌شده در فعالیت قبل دست‌یافته‌اند؟ به‌عنوان مثال، اگر درصدد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکنش آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند، بدون تزریق بر روی همهٔ افرادی که مایل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پیش رویمان می‌گذارد. روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعهٔ کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از این افراد یا اقلام تصمیم‌گیری کنیم. شیوهٔ تحلیل داده‌ها، در کنار قواعد استنباطی، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکیل می‌دهند.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار، جهت‌نمای
توسعهٔ پایدار

آمار، راهنمای ما
در تصمیم‌گیری
و برنامه‌ریزی صحیح

به مطالعهٔ نحوه گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

گفتنی است که روش‌های آماری به‌تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ این روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصمیم‌هایی بگیریم؛ اما نه هر تصمیمی. به یاد داشته باشید که حتی یک روش آماری مناسب، نمی‌تواند دقیق‌تر یا صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.

تمرین

۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟
۲. داده‌های در سطح اسمی، کتی هستند یا کیفی؟
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟
۴. در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازهٔ یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعدهٔ غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. **همه ناهار ۵ شام ۵**

ب) این متغیر کتی است یا کیفی؟ **کیفی**
پ) جامعهٔ آماری در اینجا چیست؟ **کل مشتریان غذاخوری که گیاه‌خوار هستند.**

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۶. موضوعات زیر مرتبط است. متغیرهای آنها را در چهار مقیاس: اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان *نسبی*

ب) زمان اولین کلاس *فاصله‌ای*

پ) رشته تحصیلی *اسمی*

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی و خوب *ترتیبی*

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز) *نسبی*

ج) سن دانش‌آموز *نسبی*

لقمان و مرد پیاده

خواندنی

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید. لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان نشنیده است. دوباره سؤال کرد: مگر نشنیدی؟ پرسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهیم رسید؟ لقمان گفت: راه برو، آن مرد پنداشت که لقمان دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند گفت: ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: چرا اول نگفتی؟ لقمان گفت: چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟ نکته ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید، راه برو و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی، زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد، مدت زمان دقیقی نباشد.

درس ۲

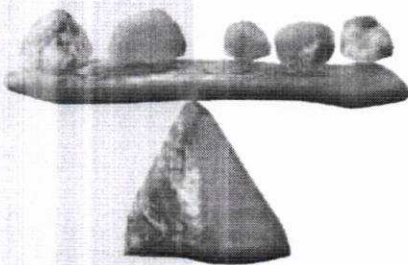
معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت



امسال خیرین مدرسه چقدر به مدرسه کمک می‌کند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشته خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به‌طور متوسط، ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این دبیرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به‌صورت زیر باشد:

درآمد (میلیون ریال)	نجمیه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵	



س برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کنیم. میانگین همان چیزی است که ما به آن معدل می‌گوییم. برای محاسبه آن شما تمامی درآمدها را باهم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم می‌کنید. اگر تمامی درآمدها را باهم جمع کنید (۱۸۹)، و بر تعداد افراد تقسیم کنید (۷)، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد درآمد سالانه برابر است با ۳۲/۴ است.

اگر n داده به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، میانگین آنها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



$$\bar{x} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} =$$

۱. میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ چقدر است؟

۲. اگر میانگین داده‌های ۱۰، ۴۰، ۳۰ شود مقدار x چقدر است؟

۳. میانگین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چقدر است؟

۴. میانگین اعداد ۲، ۴، ۶، ۸، ۵ چقدر است؟

۵. میانگین اعداد ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چقدر است؟

۶. میانگین اعداد ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰ چقدر است؟

۷. آیا می‌توانید چند قاعده کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید.

میانگین
جمع داده‌ها
تعداد داده‌ها

حال اگر یک میلیارد در با درآمد ماهیانه یک میلیارد ریال به انجمن خیریه دبیرستان ما بیاید، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دورافتاده می‌نامند.) درآمد او میانگین را تا حدود ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً ۱۴۸/۶۲۵) و بر اساس شیوه تخمین گذشته، خیرین معادل ۱۷۸ میلیون ریال (دقیقاً ۱۷۸/۳۵) را به دبیرستان کمک خواهند کرد! که غیر واقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

دور افتاده: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیه داده‌هاست.



در مثال خیریه، داده دور افتاده باعث اشتباه ما در تخمین متوسط داده‌ها شد. میانگین مرسوم‌ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است ما را به اشتباه بیندازد، ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور از میانه که داده وسطی داده‌های مرتب شده است، می‌توان استفاده کرد. پس از مرتب کردن داده‌ها، داده‌ای که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده وسطی مرتب شده است.

برای محاسبه میانه داده‌ها، قبل از ورود میلیارد، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. وسط (میانه) ۷ عدد چهارمین عدد است، پس میانه داده‌ها عدد ۲۸ است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
درآمد مرتب شده	۱۲	۲۲	۲۵	۲۸	۳۰	۳۲	۴۰

حال فرض کنید میلیارد در خیریه حضور دارد. میانه برای ۸ عدد وجود ندارد یا به عبارتی ۸ عدد، عدد وسط ندارند. پس بین داده چهارم و پنجم میانگین می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد ۲۸ و جایگاه پنجم آن ۳۰ و در نتیجه میانه جدید درآمد ۲۹ است.

مد، داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. فروشندگان پوشاک از معیار گرایش به مرکز مد بسیار استفاده می‌کنند، آنها با آمارگیری‌های خود درمی‌یابند که چه نوع پوشاکی مورد پسند مصرف کنندگان است. از همان پوشاک برای فروش سفارش می‌دهند. در رأی‌گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است، چون موضوعی که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رأی) را داشته باشد. برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم و داده با بیشترین فراوانی مد است. مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

بیشتر افراد معتقدند که عدد ۲۹ میلیون ریال گویای مقدار صحیح متوسط درآمد افراد است و عدد ۱۴۸ میلیون ریال کاملاً بی ربط است. پس ما به یک نتیجه می‌رسیم: اگر در داده‌هایمان، دور افتاده وجود داشت - دقیقاً مانند زمانی که یک میلیارد در هوس کار خیر می‌کند - باید از میانه استفاده کنیم.



تمرین

اینجا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱. میانه داده‌های ۱, ۱۴, ۸۶, ۲, ۶۸, ۹۹, ۱۰ چقدر است؟

۲. میانه داده‌های ۱۱, ۱۰, ۱۴, ۸۶, ۲, ۶۸, ۹۹, ۱ چقدر است؟

نکته اصلی در اینجا است: اگر در آمار در جایی به یک نتیجه شسته و رفته برخوردید، خیلی احتیاط کنید. به دست آوردن «یک استنباط درست از داده‌ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید: خواسته دیگر ما برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری است».

تصور کنید که به جای انجمن خیریه با یک بیمارستان سر و کار داریم و داده‌ها به جای مبلغ درآمد، هزینه‌های جراحی هستند. فرض کنید به جای میلیارد، با یک بیمار روبه‌رویم که گرفتار بعضی از مشکلات بعد از عمل است و مجموع هزینه‌هایش بالغ بر ۲۵۰ میلیون ریال است.

بیمار	هزینه‌های جراحی میلیون ریال	هزینه‌های جراحی مرتب شده
الف	۲	۱
ب	۵	۲
پ	۴۵	۳
ت	۷	۴
ث	۳۵	۵
ج	۳۰	۶
چ	۵۰	۷
ح	۲۵۰	۸

میانه مناسب‌تر است.

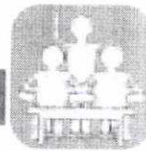


تکلیف
داده نگاری؟

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر ۵۳ میلیون ریال و میانه آن برابر ۳۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایتان از همه مهم‌تر بود؟ عدد ۳۲/۵ میلیون نشان دهنده هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجه سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانه، دلیل اینکه افراد از بیمه تأمین اجتماعی استفاده می‌کنند، روشن می‌شود؛ (میانه هزینه‌های سالیانه درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمه پرداختی است، اما با نگاه به میانگین سالیانه هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معامله خوبی کرده‌ام) و من همیشه کمربند ایمنی را می‌بندم، اگرچه میانه تعداد زخمی‌ها در هر سفر با خودرو صفر باشد. این نتیجه را نیز به یاد داشته باشید: گاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه چیز به اینکه شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید، بستگی دارد.



کار در کلاس

- با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.
 - آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به **میانه** معروف است. برای محاسبه **میانه**... به داده‌های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را باهم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.
 - میانه**... در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بالاتر از **میانه**... و نیمی دیگر مقادیر پایین‌تر از **میانه**... قرار دارند.
 - زمانی با **داده دورافتاده** مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.
 - وقتی با **داده دورافتاده** مواجه هستید، **میانه**... معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا **میانگین**...
 - به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، **میانه**... بهتر از **میانگین**... است.

شخصی دست راست خود را در یخچال و دست چپ خود را در فر کرده است. زمانی که از او درباره احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به‌طور متوسط خوب هستم». نتیجه اخلاقی این لطیفه این است که یک عدد به تنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به خوبی توصیف نمی‌کند. بنابراین، اندیشه خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز معیاری را نیز گزارش دهیم که نوسان و تغییر داده‌ها را هم بیان کند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

میانگین موزون:

شما قطعاً شنیده‌اید که برخی از نمرات شما ضرب دارند. مثلاً اگر چهار بار از شما آزمون گرفته باشند، نمره آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند، یعنی به آن ضرب ۳ بدهند. پس اگر نمرات شما به صورت زیر باشند:

آزمون اول	دوم	سوم	چهارم
۱۶	۱۵	۱۸	۱۷

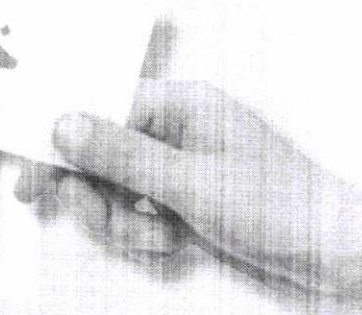
نمره‌ای که برای این درس در کارنامه شما خواهد آمد میانگین ۶ عدد است یعنی نمره درس مذکور عبارت است از:

$$\frac{16+15+18+17+17+17}{6} = 16.66$$

میانگین نمره‌ها بدون احتساب ضرب ۱۶/۵ می‌شود.

از میانگین موزون برای معدل دروسی که با واحدهای مختلف (تعداد ساعات متفاوت) در طول سال تحصیلی ارائه می‌شود نیز استفاده می‌شود.

خواندنی



درس ۳

معیارهای پراکندگی

فعالیت



می‌خواهیم کلاس‌های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم‌زمان بین دانش‌آموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه‌بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده‌اند. نمرات آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

داده‌های مربوط به سه کلاس دهم:

الف) {۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵}

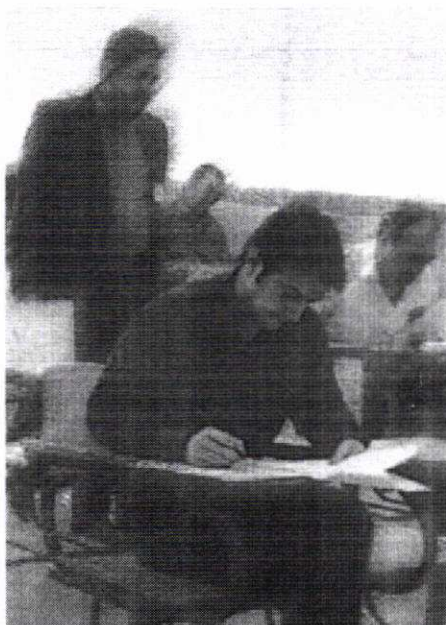
$$\bar{x} = 67$$

ب) {۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}

$$\bar{y} = 67$$

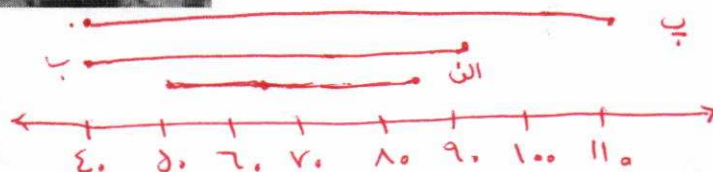
پ) {۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱}

$$\bar{z} = 67$$



میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر شما پراکندگی نمرات در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده‌ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟ چرا؟ مثلاً اگر والدین برای ثبت نام فرزند بازیگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج یکی از مدرسه‌ها را انتخاب کنند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن کمتر است در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می‌خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن بیشتر باشد. چرا؟

۱۱
۱۰
۹
۸
۷
۶
۵
۴



بهترین دانش‌آموز است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

یک معیار معمول سنجش میزان پراکندگی که نشان دهنده تغییرات داده‌های مورد مطالعه است، انحراف معیار است. انحراف معیار را با به کارگیری یک فرمول از داده‌ها به دست می‌آوریم (اختلاف هر عدد با میانگین داده‌ها را حساب کنید؛ به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید؛ و سپس جذر بگیرید.) توان دوم انحراف معیار را واریانس می‌نامند. داده‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند. همچنین انحراف معیار نمرات هر سه کلاس محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر n را به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد σ (سیگما) نشان می‌دهند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

کار در کلاس



۱. اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار برابر با صفر خواهد شد؛ چرا؟
۲. انحراف معیار نمرات آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات از میانگین	انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲
۶۵	۶۵ - ۶۷	$(-2)^2$
۷۵		
۷۳		
۸۰		
۶۰		
۶۴		
۶۹		
۶۲		
۶۷		

مشاهده می‌شود که انحراف معیار نه تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمرات را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسه کتی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

۸۵

تهیه کننده:

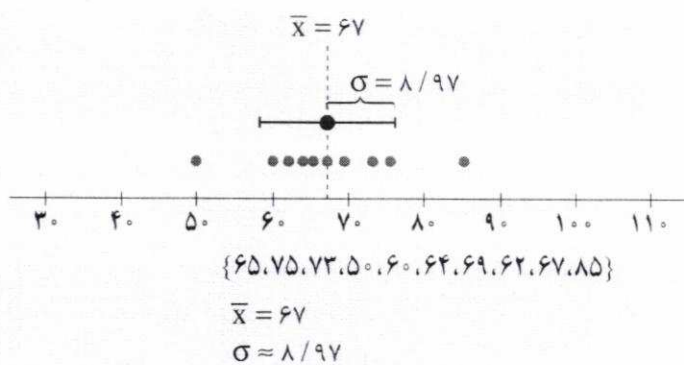
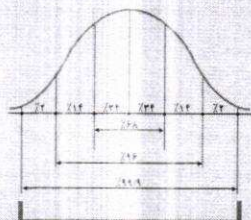
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جدول باید
در صفر
دارد به
که ایراد دارد.

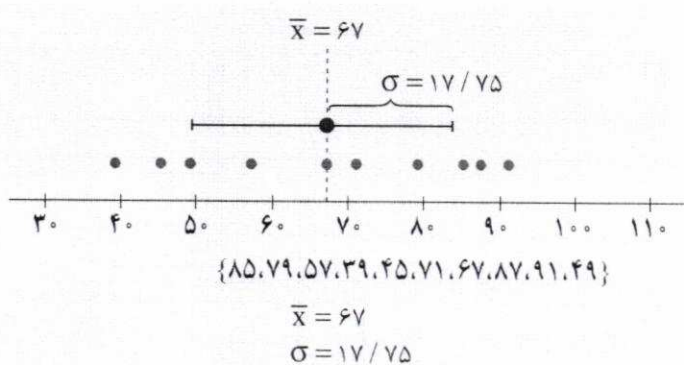


پراکندگی در خم بهنجار (منحنی نرمال)

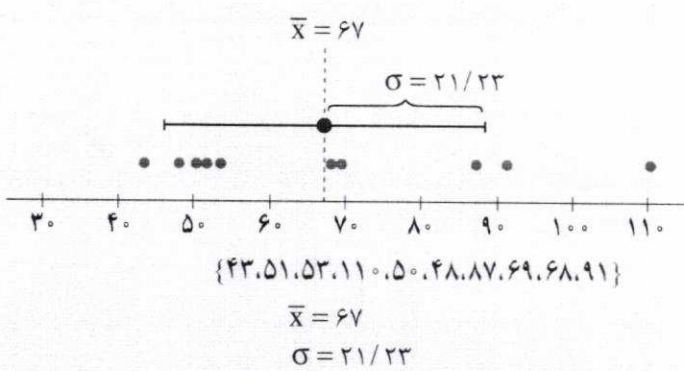
اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت‌نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم بهنجار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را بهنجار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان بهنجاراند. یعنی بافت‌نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد چند درصد داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانگه یا مرکز نقل بافت‌نگاشت است و ضرابی از انحراف معیار قرار دارد. این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



کلاس الف



کلاس ب



کلاس ج

فعالیت



حتماً بر روی قوطی‌ها یا پاکت‌های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند.

250 ± 10 گرم

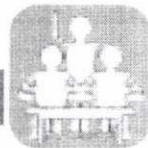
عدد ۲۵۰ وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف کننده برسد. ولی معمولاً این چنین نیست. کمی خطا اجتناب ناپذیر است. این خطا چقدر است و چگونه آن را محاسبه کنیم؟ اگر تعداد زیادی از محتوای پاکت‌ها یا قوطی‌های یک تولیدی را وزن و انحراف معیار آنها را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است. یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما ۱۰۰ قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل ۹۶ تا از آنها وزنی بین ۲۴۰ تا ۲۶۰ گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است. چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟

مجموع سؤالات متن حاشیه صفحه ۱۰۵

برای پی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم: تقریباً ۹۶ درصد از داده‌ها بین «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر بازه‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن $\bar{x} - 2\sigma$ و انتهای آن $\bar{x} + 2\sigma$ باشد، تقریباً ۹۶ درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند این مانند آن است که بگوییم، ۴ درصد نمره‌ها بیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارد. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت قانون قبل به «تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات بین یک انحراف معیار از میانگین هستند»، تغییر می‌کند. دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

بازه سؤالات متن حاشیه ۱۰۵؟

کار در کلاس



جدول زیر را تکمیل کنید.

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات بین سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات بین دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند
$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$	تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات بین یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند

فعالیت



می‌خواهیم با همان مثال خیریه درس قبل بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است؛ اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به این صورت محاسبه می‌شود:

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به کمک جدول زیر این کار را انجام دهید.

انحراف منهای از میانگین		انحراف منهای از میانگین		انحراف منهای از میانگین	
قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

۸,۵۸

زمانی که میلیارد وارد انجمن خیریه می شود، انحراف معیار داده ها برابر است با ۱۰,۱۸. این دو مقدار با هم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که ما معیار گرایش به مرکز را برای این داده ها محاسبه کردیم. ما برای رفع آن مشکل به جای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می توانیم انجام دهیم. معیار پراکندگی که تعریف می شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنه میان چارکی، که با IQR نشان می دهیم، می نامیم. «میانه» جایی در وسط داده ها است؛ به طور مشابه، چارک ها هم یک چهارم و سه چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده تر اگر برای داده های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان چارک اول است و به همین صورت میانه داده های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. برای سادگی از نمادهای Q_1 ، Q_2 و Q_3 به ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می شود.

جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

Q_1	Q_2	Q_3	$IQR = Q_3 - Q_1$	σ
چارک اول	میانه	چارک سوم	دامنه میان چارکی	انحراف معیار
			۱۰	
			۱۲,۵	

درآمد ماهیانه
اعضای خیریه
درآمد بعد از
ورود میلیارد

این اعداد امکان مشاهده چند چیز را به شما می دهند: میلیارد در هم ریختگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است. اما میانه و دامنه میان چارکی همچنان ثابت ماندند. این یکی از دلایلی است که ما می گوئیم، اگر داده دور افتاده داشته باشیم، از میانه (و در نتیجه دامنه میان چارکی) به جای میانگین استفاده کنید، در این صورت نتیجه بهتری از داده ها به دست می آورید. زمانی که تعداد داده ها زیاد باشد، به نحو دیگری می توان از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی نتیجه بگیرید که داده دور افتاده وجود داشته است.

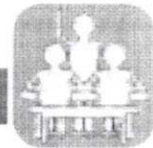
شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمارهای دقیق
بشنوای توسعه پایدار
آمار، ابزاری علمی
در توسعه مبتنی بر
داناتی

دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنه میان چارکی تفسیر ساده آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سرطان را مطالعه کنیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، مشخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیمارشان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیمارشان عود کرده است؟ اگر در گزارش، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خواننده‌ای می‌تواند از روی اطلاعات داده شده با توجه به دو قانون ذکر شده نحوه توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجا است که، آنها این کار را نخواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پزشک متخصص سرطان بسیار پر مشغله را در حال فکر کردن به این مسئله ببینید که، «خوب میانگین $64/3$ و انحراف معیار $9/8$ است؛ 68 درصد از بیماران در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین هستند؛ این یعنی $9/8 \pm 64/3$ ، که می‌شود، یک لحظه صبر کنید، ماشین حساب کجاست؟» شما تنها می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنه میان چارکی تصور خوبی نسبت به توزیع داده‌های پیش رویتان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنه میان چارکی در توصیف مجموعه داده‌ها بسیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند:

تمام آمارهایی که در اینجا ذکر شد (میانگین‌ها، میانه‌ها، انحرافات معیار، دامنه‌های میان چارکی) تحت عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.



کار در کلاس

- جملات زیر را کامل کنید:
۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفیدند. ... **میانه** ... و ... **میانگین** ... انواعی از معیارهای گرایش به مرکزی هستند.
 ۲. شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار **انحراف از میانگین** است.
 ۳. معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، ... **انحراف معیار** است.
 ۴. معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود **دامنه میان چارکی** نام دارد. **IQR**
 ۵. **میانه** ... و **دامنه میان چارکی** اطلاعات سریعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
 ۶. آماری که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌رود، **آمار توصیفی** دارد.
 ۷. 50 درصد داده‌ها قبل از ... **میانه** ... و 50 درصد داده‌ها بعد از ... **میانه** ... قرار دارند.
 ۸. 75 درصد داده‌ها قبل از ... **چارک دوم** ... یا بعد از ... **چارک اول** ... قرار دارند.
 ۹. 25 درصد داده‌ها قبل از ... **چارک اول** ... یا بعد از ... **چارک دوم** ... قرار دارند.
 ۱۰. 50 درصد داده‌ها بین ... **چارک اول** ... و ... **چارک سوم** ... قرار دارند.

تهیه کننده:

شایسته است تمرین اجتناف شود که در آن لازم است راننده
میان چاکری نیز جایسه شود.

دو اخراج میبار

۱۱. تقریباً ۹۶ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

۱۲. تقریباً ۶۸ درصد مشاهدات در فاصله ... از میانگین هستند.

تمرین

۱. یک نمونه ۲ تایی از بین اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می کنید. اگر بخواهید اعضای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می دهید؟ **استداده از تاس پرتاب مجدد در صورت تکرار**

۲. سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید) **دو تاس همزمان پرتاب می کنیم.**

۳. مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید. **موضوع های زیر را در نظر بگیرید. درباره بهترین روش جمع آوری داده برای این فرضیه ها تصمیم بگیرید:**

(الف) بیشتر مردم فکر می کنند «حداکثر سرعت در اتوبان ها باید تعیین شود».

(ب) آبی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.

(پ) در زمان مطالعه، گوش دادن به موسیقی کلاسیک به یادگیری کمک می کند.

(ت) بیشتر تصادفات اتومبیل ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می شوند.

(ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش های جمع آوری داده بیان کنید.

(الف) از طریق مصاحبه (ب) از طریق مشاهده (پ) از طریق دادگان (ث) از طریق پرسش نامه

۵. کدام یک از نمونه گیری های زیر، یک نمونه گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

(الف) با تمام پلیس های یک باسگاه پلیس برای پیدا کردن نظر آنها راجع به تخلفات مصاحبه شد.

(ب) با بچه هایی که وارد یک پارک بازی می شدند، پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان بررسی شود.

(پ) برای بررسی PH تناسبات تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

۶. برای تحقیقات و بررسی های زیر جامعه را مشخص کرده و روش نمونه گیری پیشنهاد کنید.

(الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران. (ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می دهند؟

۷. می خواهیم مدت زمانی را که دانش آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب های غیر درسی می کنند، آمارگیری کنیم.

(الف) در این آمارگیری جامعه را مشخص کنید.

این تمرین به دو تمرین جداگانه تبدیل می شود.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمار دقیق،
برنامه ریزی بهتر،
آینده روشن

آمار سیمای واقعیت،
ابزار مدیریت

حل تمرین ۲ به بعد پشت برگه

۳

اسامی آنها را روی کاغذهای یکسان می نویسیم و سپس به قید قرعه ۴ نفر آنها را انتخاب می کنیم .
 یک روش نیز استفاده از اعداد تصادفی است .

بقیه تمرین ۳ که به نظری رسیدیم این تمرین مرتبط است .
 الف) پرسش نامه ب) پرسش نامه پ) مشاهده (آزمایش)
 ت) دادگان ث) آزمایش (مشاهده)

۴

الف) بررسی علل موفقیت مدیر (برساک) - بررسی عوامل موفقیت یک فرد در تکنولوژی سراسری
 ب) بررسی میزان استفاده از کمربند ایمنی در جاده ها توسط رانندگان
 بررسی رفتار دانش آموزان در هنگام وقت استراحت آنها
 پ) بررسی میزان تصادف در یک نقطه ی خاصی در شهر - بررسی عزت دانش آموزان رشته ی ریاضی در دهه ۷۰
 ث) نظر خواهی در مورد (برای) آموزشگاه توسط مدیر - نظر خواهی در مورد رضایت مشتریان از برخورد کارکنان
 فردتگاه

۵

نمونه	جامعه	واحد آماری	روش آماری	
—	مجموعی کل پرسش ها پاسگاه	هر یک از پرسش ها پاسگاه	ایجاد عمل سرشماری است و نمی تواند عنوان گیری باشد.	الف)
بچه ها که با آنها مواجهه شد.	کل بچه ها وارد شده به پارک	هر یک از بچه ها وارد شده به پارک	عنوان گیری تصادفی (منظم، سیستماتیک)	ب)
شامپوها بر سرشده	کل شامپوها تولیدی	هر یک از شامپوها	عنوان گیری تصادفی (منظم)	ج)

۶

الف) مجموعی کل ساکنین استان مازندران متقدما - تهیه ی پرسش نامه و توزیع آن بین تعداد معینی از
 خانوارهای این شهرها انتخاب (تصادفی) که بلاک متوالی آنها
 مضرب ۳ باشد .

ب) مجموعی کل مردان کشور که شامپو مصرف می کنند .
 تهیه ی پرسش نامه و توزیع آن به متوالی شامپو مصرف کننده

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(ب) یک روش نمونه گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.

(پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می کنید؟

(ت) اندازه (تعداد) این جامعه چقدر است؟

(ث) اندازه نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب نبودن، روش نمونه گیری و نمونه خود را اصلاح کنید.

(ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.

(ج) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

۸. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه گیری آنها را ذکر کنید.

(الف) رنگ اتومبیل های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل (ب) درجه حرارت کلاس شما در روزهای سال

(پ) گنجایش آب یک باری مخزنی (تانکر) (ت) تعداد شکایات رسیده شده به یک پاسگاه پلیس

(ث) درآمد دانشجویان شاغل به کار (ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت

(ج) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری

۹. میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است:

سنت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مسئول
حقوق میلیون ریال	۱۰۰	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می دارد که میانگین پرداخت حقوق در این

شرکت بیشتر از ۲۵۷ ریال است. آیا این رقم می تواند دلیلی برای پرداخت حقوق بالاتر از این شرکت باشد؟

چرا؟ کدام یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب تر است؟

۱۰. نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال برابر است با:

۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹	۱۷
----	----	---	----	----	----

(الف) میان و میانگین را برای نمرات این دانش آموز حساب کنید.

(ب) کدام یک از شاخص های فوق، بیانگر وضع این دانش آموز در درس فیزیک است؟

(پ) اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه

میانگین وی در این درس بیشتر از ۱۸ شود، او در این امتحان چه نمره ای باید کسب کند؟

۱۱. دو دسته داده زیر قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می دهد.

بازار ۱	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۳	۸
بازار ۲	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	۱۲	۱۳	۸

$$S_1, S_2 = ?$$

(الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

(ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

(پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در «الف» همخوانی دارد؟

(ت) ترجیح می دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

(ث) اگر داده ها را در اختیار نداشته باشید، فقط به صرف داشتن دامنه تغییرات می توانید تصمیم گیری کنید؟

قبل از خرید دامنه تغییرات را بررسی کنید.

بسیار کم فرد دارد.
داده دور افتاده دارد.

$$a = \text{نمره}$$

$$18 = \frac{17+19+18+a+18+19}{6}$$

$$\rightarrow a \geq 17.$$

الف) مجموعی کل دانش آموزان کلاس

ب) انتخاب تعدادی از دانش آموزان به طور تصادفی (مثلاً دانش آموزان که شماره ردیف آنها در لیست کلاس عدد فرد باشند)

○ ساعت ۱

○ ساعت ۲

○ ساعت ۳

⋮

پ) پرسش نامه شامل تعداد ساعت معین قید شده

ت) تعداد دانش آموزان کلاس

ث) تعداد دانش آموزان انتخاب شده، هر چه جامعه کوچک باشد بهتر است سرشماری را جابجایی نمونه گیری کنیم.

ج) میزان ساعت مطالعه کتب غیر درسی

چ) کمی، کیفی، با مقیاس نسبی

ج) کیفی نسبی

چ) کیفی نسبی

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

الف) کیفی نسبی

ب) کیفی فاصله ای

پ) کیفی نسبی

ت) کیفی نسبی

ث) کیفی نسبی

نمایش داده‌ها

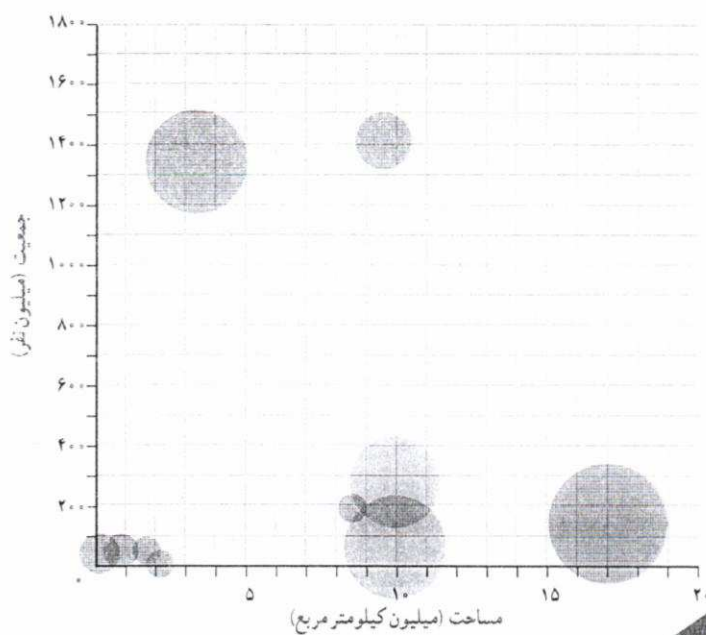
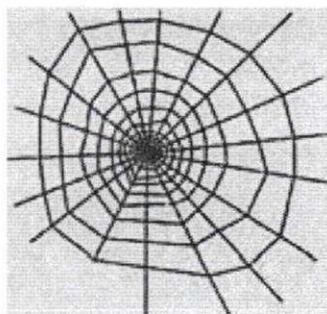
فصل پنجم

درس ۱

نمودارهای یک‌متغیره

درس ۲

نمودارهای چندمتغیره



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

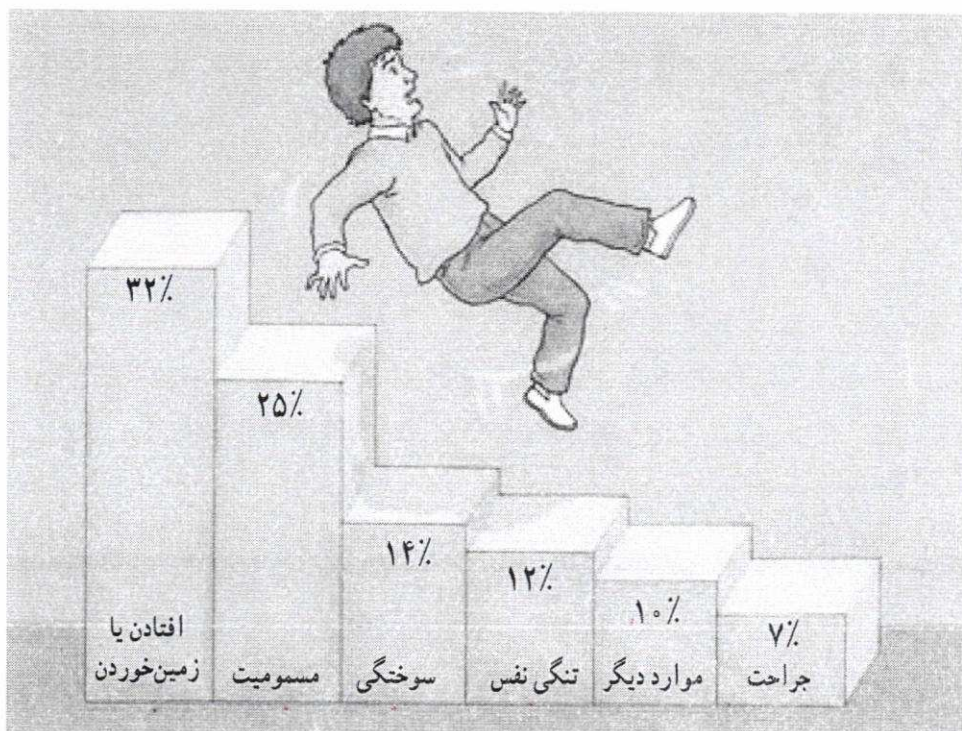
درس ۱

نمودارهای یک متغیره

فعالیت



در کلاس قرار شد هر دانش آموز با توجه به داده های موجود در رسانه ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



$$۳۲ \times ۲ = ۶۴ \quad ۲۵ \times ۲ = ۵۰ \quad ۱۴ \times ۲ = ۲۸$$

۶۴

۵۰

۲۸

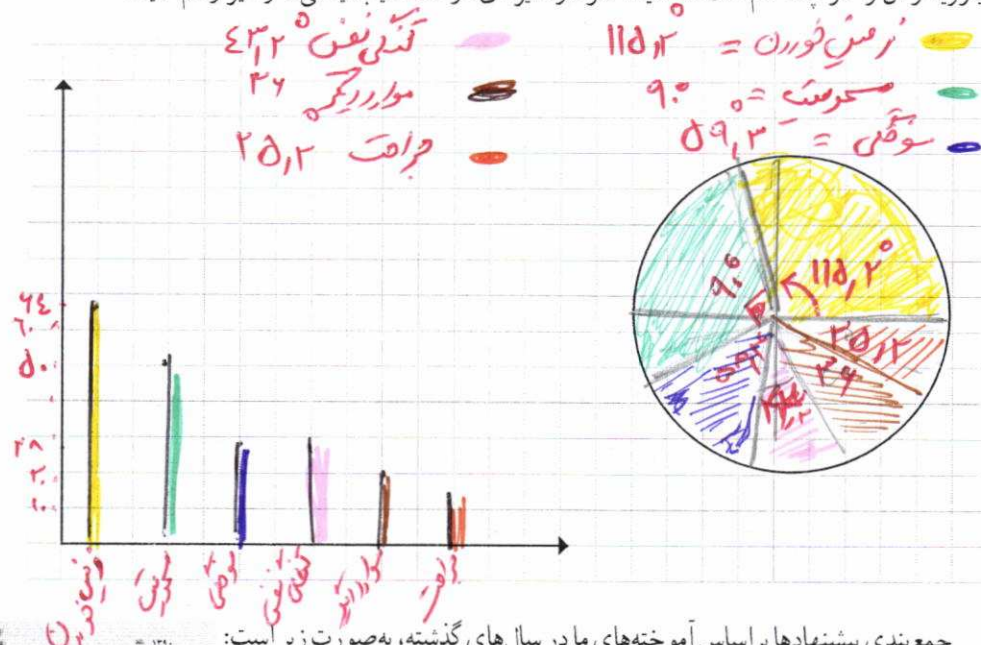
۲۴

۲۰

۱۴

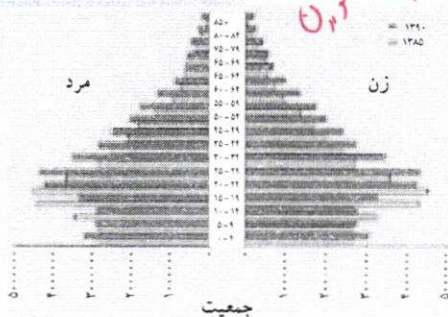
معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعبها برحسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش آموزان درخواست کرد که اگر می توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

نمودار میله ای انواع آسیب دیدگی را، برحسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره ای درصد آسیب دیدگی ها را نیز رسم کنید.



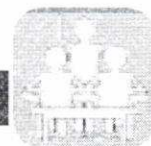
جمع بندی پیشنهادها براساس آموخته های مادر سال های گذشته، به صورت زیر است:

- ✓ رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به بیننده انتقال ندهد.
- ✓ برای متغیرهای اسمی نمودار میله ای بهتر از بافت نگاشت (هیستوگرام) است.
- ✓ زمانی که درصد را گزارش می کنیم، بهتر است از نمودار دایره ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم. البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسه هرم سنی جمعیت ایران سال های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰

کار در کلاس



در کلاس درس خود متوسط مصرف روزانه انواع میوه ها یا سبزی ها را به یکی از روش های فصل قبل جمع آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنجشنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشید، میانگین آنها برابر ۵/۱۴ است که آن را ۵ در نظر می گیریم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

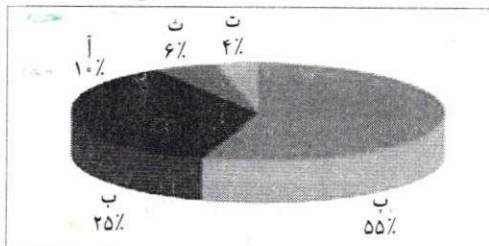
نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها، روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.



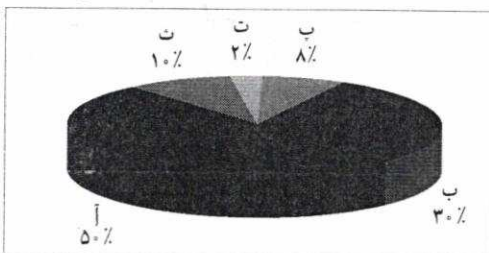
فعالیت

درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سؤال قبل کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

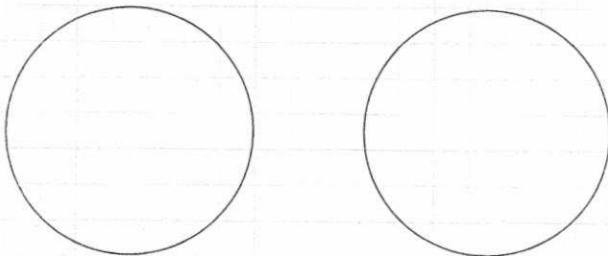
درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور



اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت روبه‌رو نشان داد.

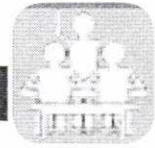
آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی؟ مانند دو نمودار قبلی.



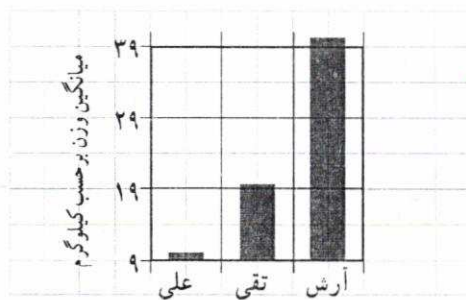
انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند. می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است.

خواندنی



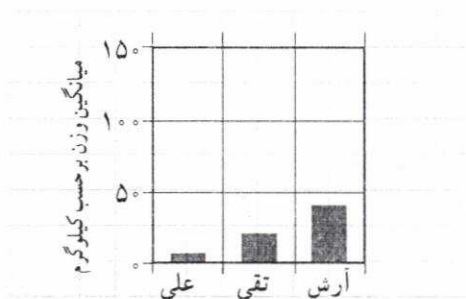
بازی با نمودارها

۳. اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدو تنبل‌های میانگین وزن بسیار کمتری دارند.

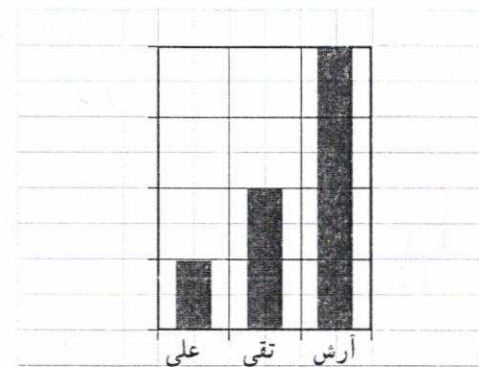
۴. اینک اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه کدو تنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، چگونه کاری می‌تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید:



اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

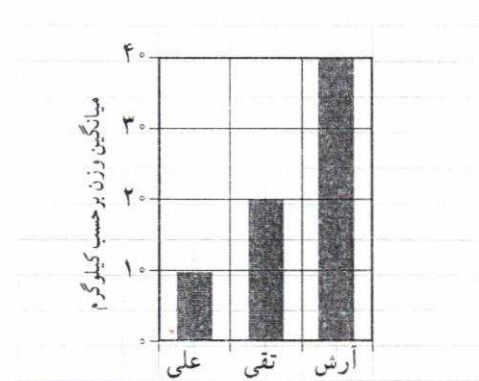
به کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. بیایید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به صورت زیر است:



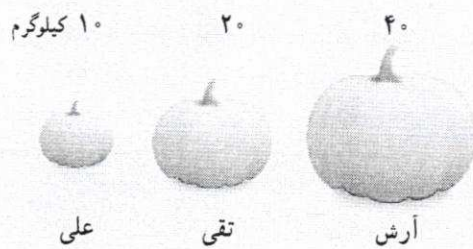
این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

معنی می‌کند که وزن کدو تنبل‌ها باغ‌ها میانگین آرش بیشتر از تقی و تقی بیشتر از علی است.



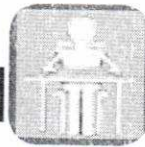
گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدو تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ *آره نه! اینم مایه: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید:*
 $\text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض و مساحت دایره} = \pi r^2$

شما چگونه این شکل را رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
 به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟ *خیر*

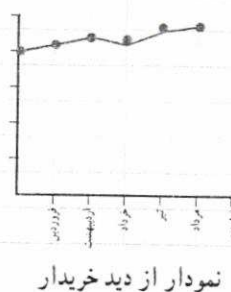
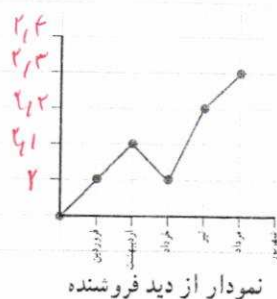
تمرین



۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟

بسیار از رسم می‌کند

۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای

دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟ *فهر*

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟ *کی*



فعالیت

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب‌شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازی بازیکن الف:

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی‌ها
۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب شده

۱۰ بازی بازیکن ب:

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب شده

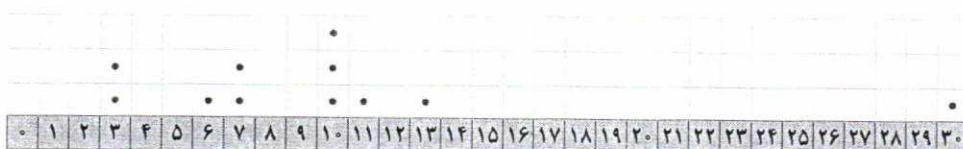
می‌توان داده‌های مرتب شده را به صورت زیر نشان داد:

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰	بازیکن الف
۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	بازیکن ب

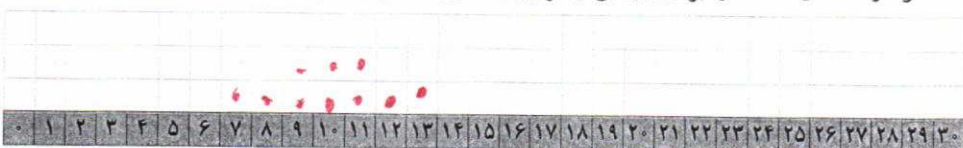
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

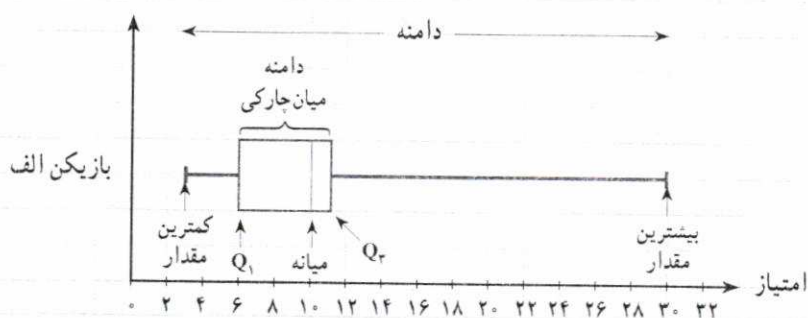
اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگویم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. برای مشخص کردن حدود دامنه میان‌چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه‌روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



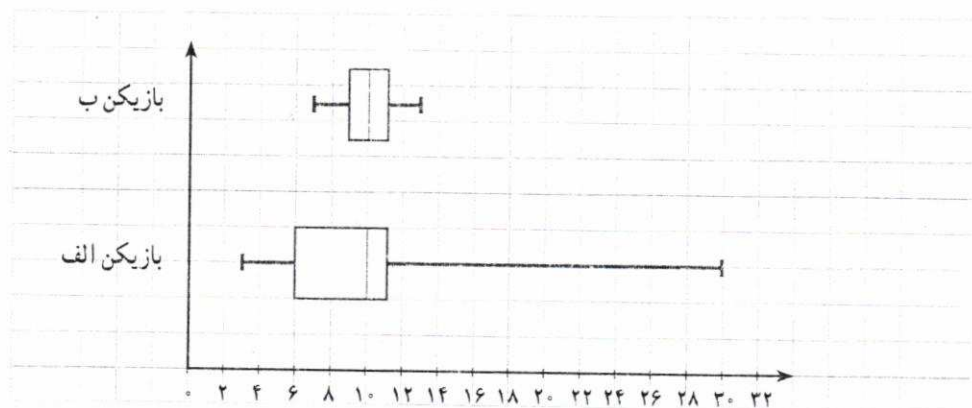
این نمودار دامنه، دامنه میان‌چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر داده‌ها در برگیرنده داده دور افتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش $\propto$ می‌یابد. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها پی ببرید.

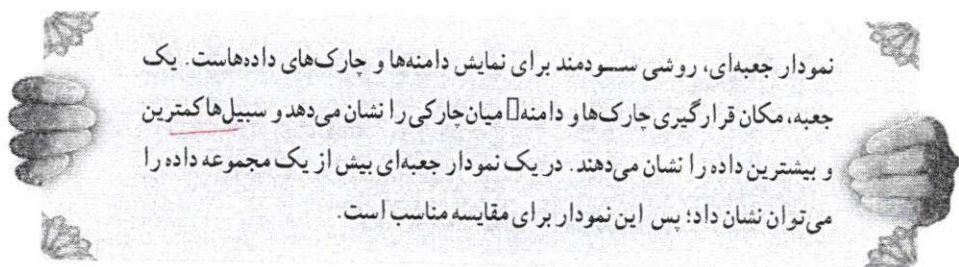
نمودار جعبه‌ای دو بسکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل یا حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



بازیکن ب دامنه نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانه هر دو برابر با ۱۰ است.

بازیکن الف دامنه امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد، و گاهی هم بسیار کمتر.

بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است (میانه‌ها و دامنه میان‌چارکی را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.



نمودار جعبه‌ای، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین داده را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنه میان‌چارکی به نظر مفید می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاه‌گاه امتیازات بسیار پایینی کسب می‌کنند چگونه؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای ما به قیمت از دست دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. مطمئن نیستیم که دامنه یا دامنه میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد.

از آنجا که دو خط
دو طرف جعبه شبیه سبیل
گره است. بعضی مواقع
به آن نمودار جعبه و سبیل
گفته می‌شود.

مربی نباید فقط دامنه امتیازات بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند، امتیازاتش کمترین تغییرات را داشته باشد.



مشکل دامنه و دامنه میان چارگی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شما می گویند؛ اما نمی گویند که چند وقت به چند وقت بازیکنان این امتیازات کم و زیاد را در مقابل امتیازات نزدیک به میانه کسب می کنند. این برای مربی مهم است.

کار در کلاس



برای مجموعه داده های زیر نمودار جعبه ای بکشید.

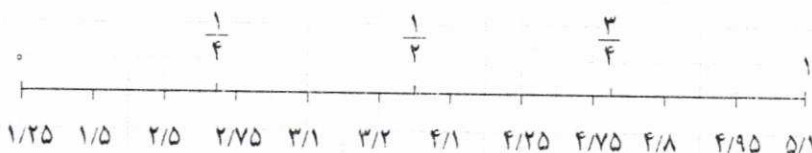
۱۲۵ ۱۰۵ ۲۰۵ ۲۰۵ ۳۰۱ ۳۰۲ ۴۰۱ ۴۰۲۵ ۴۰۷۵ ۴۰۸ ۴۰۹۵ ۵۰۱
 ۴۰۸، ۲۰۵، ۴۰۷، ۱۰۲۵، ۱۰۵، ۲۰۵، ۳۰۱، ۳۰۲، ۴۰۲۵، ۴۰۷۵، ۴۰۹۵، ۵۰۱

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.

از آنجا که اعداد به ترتیب چیده شده اند، اولین عدد کمترین مقدار است و آخرین عدد بیشترین مقدار.

گام دوم: چارک ها را مشخص کنید.

در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک ها استفاده کنیم.



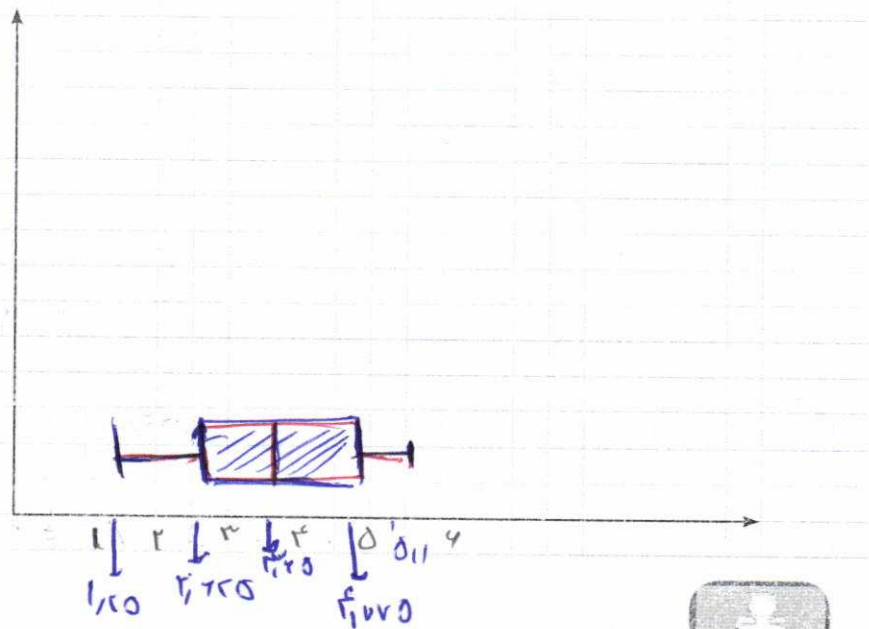
با نگاه به شکل بالا در می یابیم که میانه بین مقادیر ۳۰۲ و ۴۰۱ است، بنابراین، مقدار میانه می شود: ۳۵۰.

چارک اول، بین مقادیر ۲۰۵ و ۲۰۷۵ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می شود: ۲۱۲۰۵.
 چارک سوم بین مقادیر ۴۰۸ و ۴۰۹۵ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می شود: ۴۱۷۰۵.

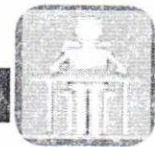
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گام سوم: نمودار جعبه‌ای رسم کنید.



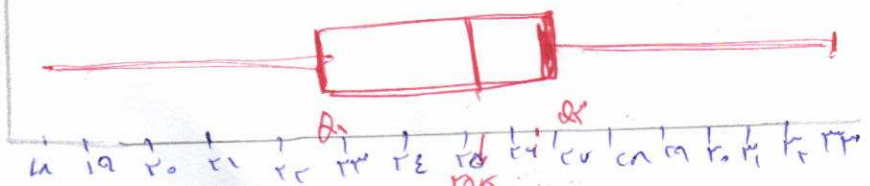
تمرین



۱. نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟ **وقتی فاصله فراوانی دارد کم باشد - فراوانی**
۲. نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند. با این تفاوت که محورها جرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟ **وقتی که اسم رده‌ها طولانی باشد -**
۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷ | ۲۴ | ۲۶ | ۲۶ | ۲۹ | ۱۹ | ۳۱ | ۱۸ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۳ | ۲۹ | ۲۵ | ۲۵ | ۳۳ | ۳۱ | ۲۱ | ۲۶ | ۲۵
الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

- ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.
- پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **بیشتر میانگین (۱۱) کمتر میانگین (۱۸)**
- ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ **بیشتر میانه (۱۱) کمتر میانه (۱۸)**
- ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید به این سوال پاسخ دهید؟ **بله طبق فرمول: ۱۵ - ۱۰ = ۵**



نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند، با این فرق که محورها جرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده می‌شود.

نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشند، مفید واقع می‌شوند. آنها برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشتن، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

$\bar{x} = 25,15$
 $\text{میانه} = 25,15$
 $s = 25,24$

$Q_1 = 23$
 $Q_2 = 25,15$
 $Q_3 = 27$

درس ۲

نمودارهای چند متغیره



فعالیت

پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

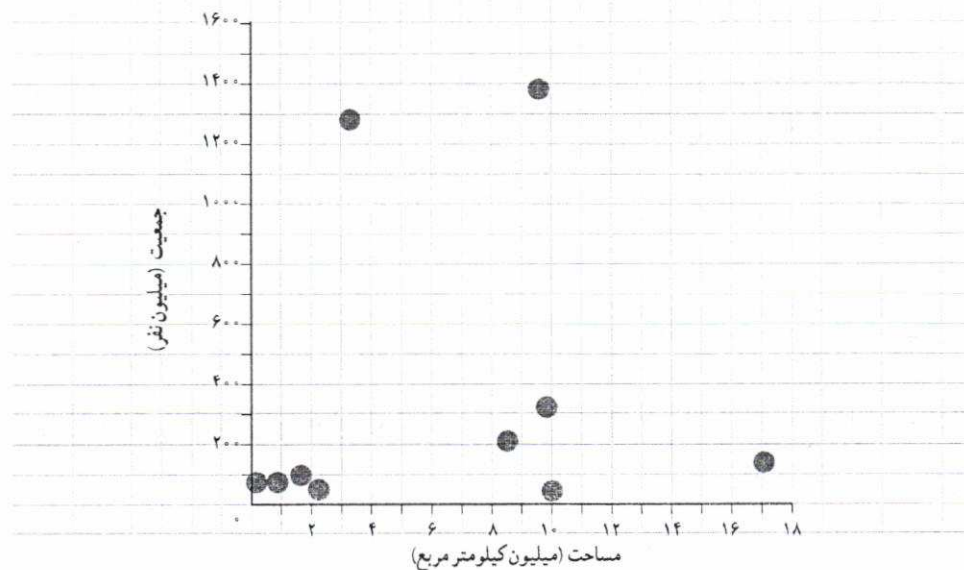
نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آبها (درصد)
۱ ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
۲ آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
۳ انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
۴ برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
۵ ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
۶ چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
۷ روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
۸ عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
۹ کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
۱۰ هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آبها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند پراکنش نگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به‌طور هم‌زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

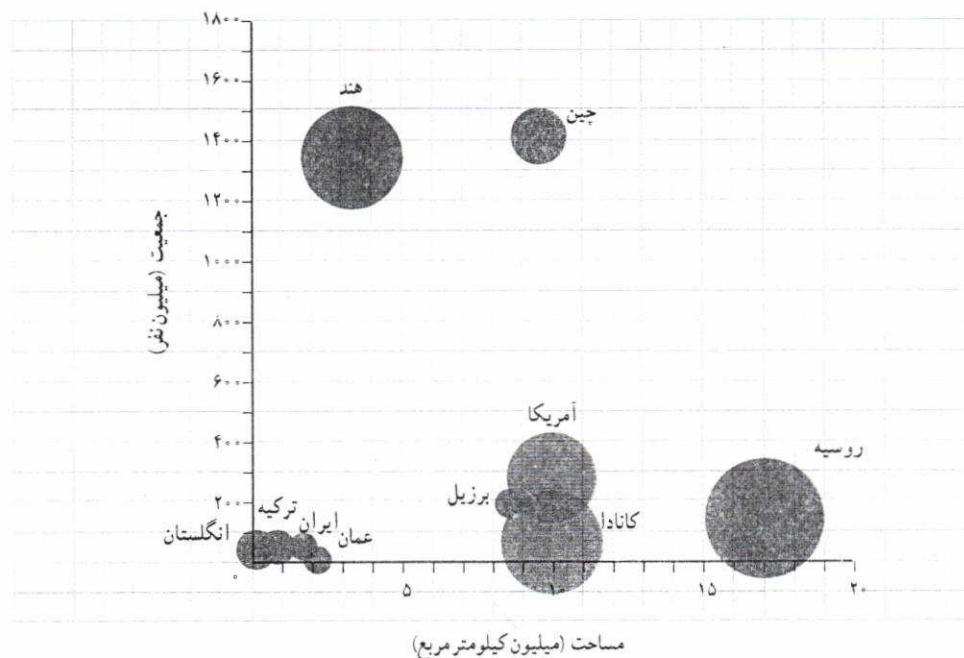
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین طور که به پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.

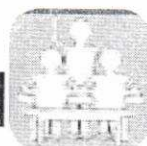
هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

- V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی،
- V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی،
- V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونه خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

سیستم بینایی انسان به‌طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت. توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.

کار در کلاس



قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

- (الف) قد، وزن، نمره ریاضی
- (ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی
- (پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

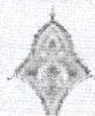
سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید؛ به‌طوری که دایره‌ها هربار، نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند.

تمرین



۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟
 - (الف) شعاع دایره‌ها
 - (پ) محیط دایره‌ها
 - (ب) قطر دایره‌ها
 - (ت) مساحت دایره‌ها ✓
۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟
 - (الف) یک متغیر
 - (پ) سه متغیر ✓
 - (ب) دو متغیر
 - (ت) محدودیتی ندارد

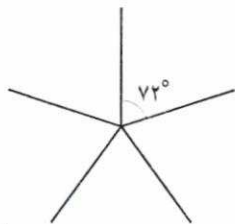
تهیه کننده:



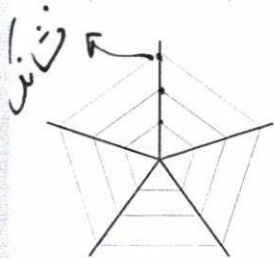
اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورها می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟



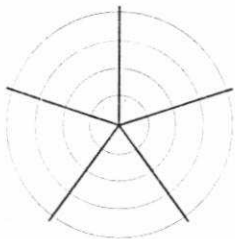
نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کتی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.



نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر: نیم خط) به‌شکل یزه‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهنده یک متغیر است؛ پس می‌توانند درجه‌بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



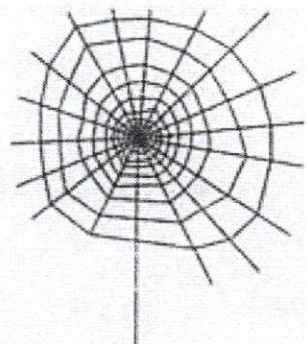
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به‌گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متوالی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به‌شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.

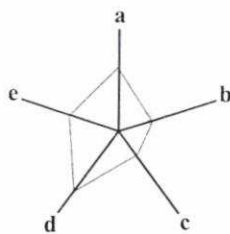


گاهی این خطوط راهنما را به‌جای راست خط به‌صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.

خواندنی

از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.





نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر به ازای همه مشاهده‌ها، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می‌کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع‌ها انجام می‌دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع‌های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می‌کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می‌توانیم مشاهده‌ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می‌گوید:

• کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟

• آیا داده دور افتاده‌ای وجود دارد؟

• مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟

• مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

یادآوری: منظور از مشاهده یا نقطه داده‌ای در آمار، مجموعه‌ای است شامل یک یا چند

مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعه‌ی آماری (= واحد آماری).

مثلاً اگر واحدهای آماری، دانش‌آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان

را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش‌آموزان، یک «مشاهده» است.

◆ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توپ طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در

نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده‌های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول

فصل ۲۰۱۳-۲۰۱۲ را بررسی می‌کنیم. (همه داده‌ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه‌گیری

شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده‌اند.)

متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه‌های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس‌های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تکل (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توپربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

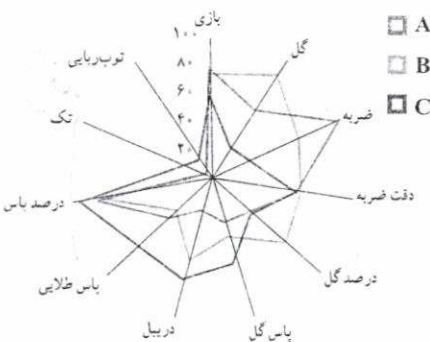
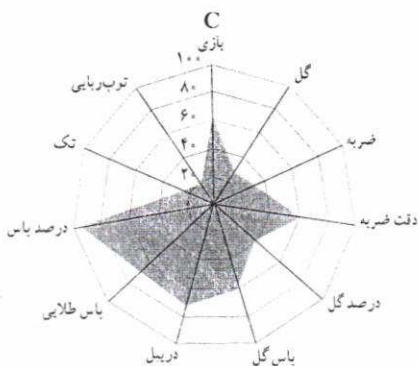
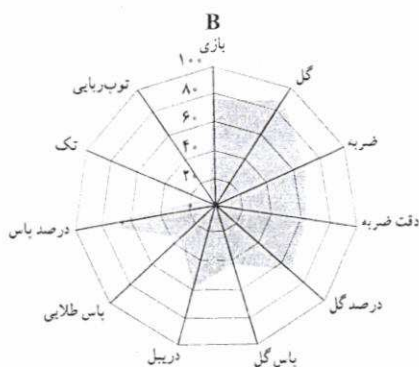
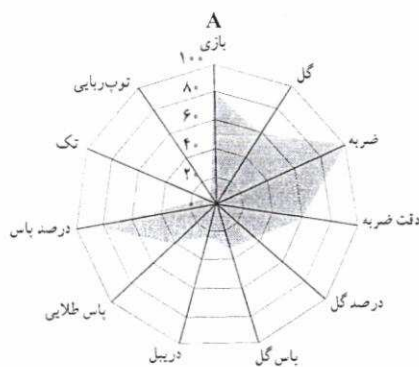
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



توپ طلای فدراسیون بین‌المللی فوتبال (فیفا)، جایزه‌ای است که هر سال توسط فیفا و مجله فرانس فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد داده می‌شود. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی‌گیری از نمایندگان رسانه‌های بین‌المللی و سرمربیان و کاپیتان‌های تیم‌های ملی فوتبال صورت می‌گیرد.

از زده‌های بازیکن A به سمت دروازه استادیوم.



اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او به‌ویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

تعداد گل‌های زده‌های بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزء برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به‌طور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار B، وسعت زیادی دارد.

نمودار C به‌شکل جذابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.

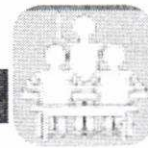
نمودارهای A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گل‌زنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌های گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.

اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسه بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلای سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

C.

A

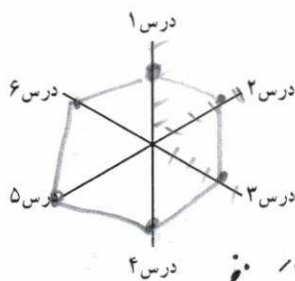
کار در کلاس



آموزگاران شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می کند:

- ۱- ریاضی و آمار ۱۵ ۲- منطق ۱۶
 ۳- عربی ۱۴ ۴- مطالعات ۱۷
 ۵- ورزش ۲۰ ۶- ادبیات ۱۸

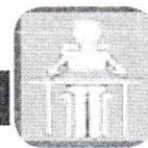
الف) نمودار راداری نمره های خود را به صورت مقابل رسم کنید:



ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره های کدامتان بهتر است؟ هر نمودار در درستی که باشد.

تمرین



منابع:
 ۱. آنسفته (۱۳۹۵)، ترنندهار
 سواد آماری، خانه آمار اصفهان
 ۲. بهریدیان (۱۳۹۳)، آمار و
 احتمال مقدماتی، انتشارات
 آستان قدس
 ۳. گسروه مؤلفان (۱۳۹۵)، آمار و
 مدل سازی، وزارت آموزش و
 پرورش

۴. C. H. Brase and C. P. Brase (2012), Under-standable Statistics, Brooks/Cole
 ۵. D. Griffiths (2009), Head First Statistics, O'Reilly Media
 ۶. S. McKillup (2004), Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press
 7. A. J. Vickers (2009), What is a p-value any-way? 34 Stories to Help You Actually Understand Statistics, Pearson
 8. Written by Volunteers (2014), Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Siyavula

۱. نمودار راداری برای نمایش داده های چند متغیر کمتی به طور هم زمان به کار می رود؟
 ۲. زاویه بین شعاع های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می دهد؟
 ۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می گوید؟
 ۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟
 ۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟
 ۶. داده های زیر را که مربوط به شاخص های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
X_1 عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
X_2 نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
X_3 نسبت ولادت ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
X_4 نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
X_5 شاخص آمادگی اجرای مقررات بین المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)



جواب ۳: کدام متغیر ها به سبب یکدیگر هستند - آیا داده در داده در دراز مدت - مقدار کدام متغیر بزرگتر است
 نسبت به متغیر های دیگر بزرگتر یا کمتر است - مقدار کدام متغیر نسبت به متغیر ها کوچکتر یا بزرگتر است

« ورود به سایت

بانک گام به گام
دیجی کنکور



وبسایت دیجی کنکور بزرگترین مرجع جزوات از ابتدایی تا کنکور

دیجی کنکور

رسانه دانش آموزان موفق

DigiKonkur.com

کنکوری ها
یازدهمی ها
دهمی ها



کانال تلگرام دیجی کنکور

یک کانال جامع به جای همه اپ ها و کانال های دیگر

دوره های مشاوره ای

برنامه ریزی روزانه

نمونه سوالات امتحانی

فیلم های کنکوری

پادکست های انگیزشی

جزوات درسی

و هر چیزی که نیاز داری و نداری ...
همه خدمات این کانال همیشه رایگان است

برای عضویت اینجا کلیک کنید



DGKonkur